

Chapter 8

連続スペクトル中のエネルギー分布

THE ENERGY DISTRIBUTION IN THE CONTINUOUS SPECTRA

- § 1. 恒星光球における輻射の吸収
- § 2. B2~A0型恒星光球における輻射平衡
- § 3. 理論と観測との比較
- § 4. 恒星の色温度

Chapter 8 連続スペクトル中のエネルギー分布

THE ENERGY DISTRIBUTION IN THE CONTINUOUS SPECTRA

§ 1. 恒星光球における輻射の吸収

種々のスペクトル型の星の光球内では、どんな原子やイオンが主として吸収を行うかを考える。輻射の吸収は § 7.(4)式で判るように、1 cc中の吸収原子の数と、その原子吸収係数に比例する。低温星から高温星へと順次調べていこう。

1. K, M, N型

M, N型の低温星では分子化合物が存在し、スペクトルは分子吸収帯で著しく歪んでいる。分子吸収（殆どの型では真の吸収ではなく、散乱であるが）を考慮することは非常に難しい。

分子吸収の他に、僅かであるが水素の負イオンが吸収に与っている。これによる吸収効果は水素負イオンの数 N_{H^-} に比例するが、その数は明らかに中性水素の数と自由電子の数の多いほど多くなる筈である。 $T_e = 7,000 \sim 8,000 K$ 以下の星では水素の電離 ($\chi_0 = 13.59 eV$) は起こらず、中性水素のままである。また自由電子は（吸収線理論から判るように）まだ僅かである。K型星くらいになってやっとN。がかなり大きくなり水素負イオンが重要になる。

★水素負イオン H^- の役割

低温星で僅かに吸収に寄与し、太陽 (dG2) くらいでは非常に有力である。更に T_e が高くなると H^- イオンの役割は再び減少する。これは主にH原子の吸収能の増加による。その上、温度とともに H^- の解離が進むからである。しかし、解離ポテンシャルが $0.75 eV$ と小さいため、サハの式から判るように、 T_e による解離度の増加は非常に緩やかで、 T_e が大きければ更にその増加は緩やかである。しかし温度が高くなると H^- が解離するばかりでなく、中性水素自体が電離により減少する。計算によると A0型の正常星ではもはや H^- の役割は小さい。

★自由電子

中性水素と結合して H^- イオンを作る自由電子は、低温星では電離ポテンシャルの低い Na ($\chi_0 = 5.12 eV$), Mg ($\chi_0 = 7.61 eV$), Ca ($\chi_0 = 6.09 eV$) 等の電離から生ずるものである。他方、星の中で圧倒的に豊富な H ($\chi_0 = 13.59 eV$) はポテンシャルがかなり大きいので、低温では電離によって自由電子を出すことは殆どできず、 $6,000 \sim 7,000 K$ 以上になって初めて自由電子を供給する。

★水素原子の役割

晩期星では、それは実際的に殆ど全て中性であるが、その役割は全く無視できる。中性水素による Lyman 系列極限 ($\lambda 912 \text{ \AA}$) までの輻射の吸収は、励起準位からの光電電離によるものであるが、最初の励起準位 ($n=2$) でさえ励起ポテンシャルは非常に大きく ($\chi_{0.2} = 10.16 \text{ eV}$)、この準位に励起された中性水素の数は低温では完全に無視できる (Boltzmann 公式の計算例参照)。

2. G 型 (太陽)

太陽のような星の光球では分子吸収はもうそれほど重要でない。また励起金属原子による吸収も H^- の吸収に比べれば全く無視できる。赤外部・可視部・紫外部近く ($4,000 \text{ \AA}$) までの広い波長域に亘って、 H^- が吸収を決定する。金属はその基底準位からの光電電離によって僅かに $3,000 \text{ \AA}$ 以下の波長で寄与しているようである。 $4,000 \text{ \AA}$ 以下の波長域で密集している吸収線による光球輻射の散乱もまた重要である。直接の観測からも、ちょうど $4,000 \text{ \AA}$ を越えたところで連続スペクトル強度が異常に鋭く減少しているのが認められる。 Lyman 系列極限までの遠紫外域における吸収線の影響も著しい。この領域には種々の元素の強い共鳴線が多数密集している。 Lyman 系列線も特に強い。しかし、元来この遠紫外部では輻射の強度自体が比較的弱いのみだから、吸収線の影響が著しいといっても大したものではない。中性水素原子による吸収は先に述べた理由でまだ重要ではない。

3. A~F 型

更に高温星になると、励起準位にある中性水素原子の数が次第に増加する。他方、負水素イオンの数は温度の増加とともに緩やかに減少する。両者の原子吸収係数が何れも同じ程度 ($\sim 10^{-17} \text{ cm}^2$) だから、両者の数が匹敵するようになると同じように有効に吸収を行うことになる。紫外部における金属吸収線による影響も減少し、A 型星では既に小さい。

4. A0 型

更に高温になると、励起水素原子の数は H^- イオンの数より優勢になり始め、中性水素が吸収を決定する。A0 型正常星の光球では H^- イオンの吸収は、もはや重要ではない。従って、負水素イオン H^- から中性水素への連続的な役割移行は F, A 型くらいの星の光球で起こるようである。しかし、白色矮星では N。が大きいため、A0 型でさえ H^- はまだかなり重要である。

5. B2~A0型

この型の光球では中性水素が主要な吸収元素である。この型の巨星の光球では自由電子による輻射の散乱が重要になり始める。

6. O, B0~B2型

これらの星の光球では、ヘリウム原子による紫外部の輻射の吸収が中性水素原子による吸収に加わる。しかし、重要な要素は自由電子による散乱である。それは水素が殆ど完全に電離し、非常に多くの自由電子が作られ、他方、中性水素は殆ど無くなるからである。

さて、吸収係数が振動数によって変わる場合の輻射平衡の理論に進むのだが、この問題を解く数学的に著しい困難さは、異なるスペクトル型の星の光球では異なる吸収が起こり、振動数の関数としての κ_{ν} の形が複雑に変わることである。従って、問題を解くには各々の場合に分けて行わねばならないし、単純化するための仮定や逐次近似法を使わねばならない。

§ 2. Radiative equilibrium in the photospheres of stars of classes B2 to A0.

例として、B2~A0型の星の光球の輻射平衡を考える。この場合、輻射の吸収は、主として、中性水素に起因するから、問題はかなり簡単に解く。ここで、Chapter 5の終りに考察した、強磁場の方向に放射平衡を用いた逐次近似で問題を解く。

(8.5.4)式により、水素原子の吸収係数を

$$\kappa_{\nu} = \bar{\alpha}(p_e, \mathcal{E}) \bar{\alpha}(\nu, \mathcal{E}) \quad (1)$$

の型で書くことによる。TSE

$$\bar{\alpha}(p_e, \mathcal{E}) = \frac{C_0 \alpha \cdot p_e}{m_H \mathcal{E}^{3/2}} \quad (2)$$

$$\bar{\alpha}(\nu, \mathcal{E}) = \left[\frac{\alpha h R}{k \mathcal{E}} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{g'}{n^3} e^{kR/n^2 k \mathcal{E}} + g'' \right] \frac{1 - e^{-h\nu/k\mathcal{E}}}{\nu^3} \quad (3)$$

この、原子吸収係数 k_{ν} から質量吸収係数 κ_{ν} に (8.2.3) に従って変換した場合、水素原子の質量を m_H と書く。この後、光学の厚さの要素 $d\tau_{\nu}$ は、

$$d\tau_{\nu} = \bar{\alpha}(p_e, \mathcal{E}) \cdot \bar{\alpha}(\nu, \mathcal{E}) \rho \cdot dh \quad (4)$$

ここで簡単のため新しい変数 ξ と、

$$d\xi = \frac{3}{2} \bar{\alpha}(p_e, \mathcal{E}) \rho \cdot dh \quad (5)$$

を導入すれば、

$$\frac{3}{2} d\tau_{\nu} = \bar{\alpha}(\nu, \mathcal{E}) d\xi \quad (6)$$

$$\frac{3}{2} \tau_{\nu} = \int_0^{\xi} \bar{\alpha}(\nu, \mathcal{E}) d\xi \quad (7)$$

となる。この τ_{ν} を用いて ()、()、() は、次の様になることによる。

$$\frac{1}{\bar{\alpha}(\nu, \mathcal{E})} \frac{dJ_{\nu}}{d\xi} = \frac{1}{2} F_{\nu} \quad (8)$$

$$I_{\nu} = \exp\left[\int_0^{\xi} \bar{\alpha}(\nu, \mathcal{E}) d\xi'\right] \int_0^{\infty} \Delta_{\nu} \exp\left[-\int_0^{\xi'} \bar{\alpha}(\nu, \mathcal{E}) d\xi''\right] d\xi' \quad (9)$$

$$I'_{\nu} = \exp\left[-\int_0^{\xi} \bar{\alpha}(\nu, \mathcal{E}) d\xi'\right] \int_0^{\xi} \Delta_{\nu} \exp\left[\int_0^{\xi'} \bar{\alpha}(\nu, \mathcal{E}) d\xi''\right] d\xi' \quad (10)$$

よて

$$\Delta v = B_v \bar{\varphi}(v, \mathcal{I}) = \frac{2h}{c^2} \left[\frac{2hR}{k\mathcal{I}} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{g'}{n^2} e^{\frac{hR/n^2 k\mathcal{I}}{k\mathcal{I}}} + g'' \right] e^{-h\nu/k\mathcal{I}} \quad (11)$$

4. v と \mathcal{I} の定数函数である。これらの式を問題4. 温度 \mathcal{I} の星の内部で ξ と ξ_0 にかゝる変数にかゝる式に直す。

$$\text{よて} \quad \frac{dJ_v}{d\xi} = \frac{dJ_v}{d\mathcal{I}} \frac{d\mathcal{I}}{d\xi} \quad (12)$$

を() に代入すると v による積分を得

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\xi} = \frac{F}{2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\bar{\varphi}(v, \mathcal{I})} \frac{dJ_v}{d\mathcal{I}} dv} \quad (13)$$

これら各々の基礎式である。ここで $dJ_v/d\mathcal{I}$ は未知函数であるが この式は逐次近似の解を求めるに、第一近似として 星の大気の深部 ($\mathcal{I} \rightarrow \infty$) で成立する関係。

$$\frac{dJ_v}{d\mathcal{I}} = \frac{dB_v}{d\mathcal{I}} \quad (14)$$

を用いる。すると

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\xi} = \frac{F}{2 \chi(\mathcal{I})} \quad (15)$$

$$\text{但し} \quad \chi(\mathcal{I}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\bar{\varphi}(v, \mathcal{I})} \frac{dB_v}{d\mathcal{I}} dv \quad (16)$$

4. \mathcal{I} だけの定数函数である。従って数値計算により、任意の \mathcal{I} に対する $\chi(\mathcal{I})$ を求める。この $\chi(\mathcal{I})$ により、与えられた F (従って与えられた ξ_0) に対して () 式を積分すれば ξ が得られる。 $\xi = 0$ では \mathcal{I} は表面温度 \mathcal{I}_0 である。

$$\int_{\mathcal{I}_0}^{\mathcal{I}} \chi(\mathcal{I}) d\mathcal{I} = \frac{1}{2} F \xi$$

よて、積分定数として入った ξ_0 を決めればよい。若し、問題の近似が、正確に解けた場合には、得られた温度分布は $\sigma \mathcal{I}_0^4$ に等しい総流量 πF のどの深さでも同じにわたるものとなる。従って、総流量 $\sigma \mathcal{I}_0^4$ となるのは、近似の不正確の目安となる。そこで吾々は、第一近似で得られた解の、表面 $\xi = 0$ の流量 $\sigma \mathcal{I}_0^4$ と

与えられた積分定数を決定する。()式に(1)式を代入し、地球表面における温度分布

$$(I_V)_0 = \int_0^\infty \Delta_V(z) \exp\left[-\int_0^z \alpha(V, z) dz\right] dz$$

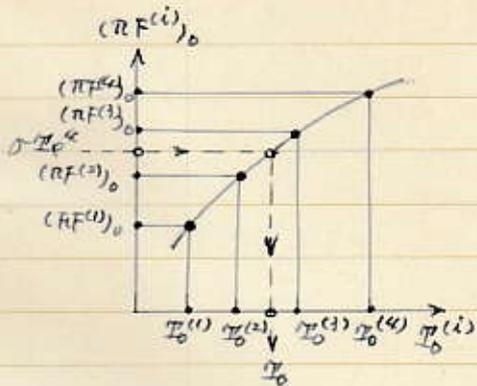
表面での平均放射熱流束 $(I_V)_0 = 0$ を()式に代入し、

$$(\pi F)_0 = \pi \int_0^\infty (F_V)_0 dV = \pi \int_0^\infty (I_V)_0 dV$$

$$= \pi \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \Delta_V(z) \exp\left[-\int_0^z \alpha(V, z) dz\right] dz \right\} dV$$

地球表面温度分布 T_0 を決めるための仮定は、()式を代入し、地球内部の温度分布 $T(z)$ を求める。任意の z における $T(z)$ は()式に代入し、数値積分で、種々の z について $(I_V)_0$ を得る。之を()式に代入し、数値積分により $(\pi F)_0$ を求める。

基本条件 $(\pi F)_0 = \sigma T_0^4$ が満たされる場合 T_0 に対するは、次のように求められる。まず 3~4 個の T_0 を与える。即ち、大抵予想される値に近く $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)}$, $T_0^{(3)}$, $T_0^{(4)}$ を定め夫々に対して () を積分する。こうして求められた温度分布の各々について $(I_V)_0$ を計算し、更に () に依り $(\pi F)_0$ の値、即ち $(RF^{(1)})_0, (RF^{(2)})_0, (RF^{(3)})_0, (RF^{(4)})_0$ を求め、更に $T_0^{(2)}$ に対して計算する。



$T_0^{(i)}$ を横軸に、 $(\pi F^{(i)})_0$ を縦軸に σT_0^4 を flux σT_0^4 に対応する T_0 を読み取れば、之が求める表面温度である。

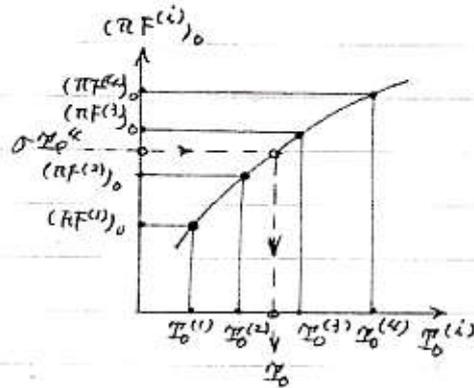
若しこの T_0 を用いて () を積分し、更に $(\pi I_V)_0, (\pi F)_0$ を求めれば、 $(\pi F)_0$ 及び σT_0^4 の値を得るはずであり、之は互換の test となる。

最後の T_0 に対する $(I_V)_0$ は星の全輻射の spectrum の energy 分布に等しい。

即ち第一近似として求めた温度分布は、星の表面での flux σT_0^4 を与える。もし調心であるならば、 πF の一箇所は表面 ($\xi=0$) であり、かなり深くまで ($\tau_v \rightarrow \infty$) 降りていくことになる。

更に第一近似に用いた T_0 は、次のようにすればよい。第一近似で得た温度分布 $T(\xi)$ に基いて一層の T_0 (従って T_0) の値に対して () () から I_V, I_V' を決めることができる。従って之等の T_0 の値に対して () から J_V を決める。数値微分を有れば、 dJ_V/dT_0 を求める。之を基本式 () に代入して同じ計算を繰返すのである。

基本条件 $(\pi F)_0 = \sigma T_e^4$ が満たれるように T_0 を求める。次の
 手順に従って求める。まず 3~4 個の T_0 を
 与える。即ち、大体予想される値に近く $T_0^{(1)}$ 、
 $T_0^{(2)}$ 、 $T_0^{(3)}$ 、 $T_0^{(4)}$ を適切な値に選んで
 () 式を積分する。これによって求められた
 温度分布の各点について $(I\nu)_0$ を計算し、
 更に () に依り $(\pi F)_0$ の値、即ち
 $(\pi F^{(1)})_0$ 、 $(\pi F^{(2)})_0$ 、 $(\pi F^{(3)})_0$ 、 $(\pi F^{(4)})_0$
 を求め、置換 $T_0^{(i)}$ に依りて計算する。



$T_0^{(i)}$ を横軸とし、 $(\pi F^{(i)})_0$ を縦軸として σT_e^4 を flux
 σT_e^4 に対する T_0 を読み取れば、之が求めた表面温度である。

右の T_0 を用い () を積分し、更に $(\pi I\nu)_0$ 、 $(\pi F)_0$ を求め
 ておけば、 $(\pi F)_0$ 及び σT_e^4 の値を得るはずであり、之は互換の test
 とする。

最後の T_0 に対する $(I\nu)_0$ は星の全輻射の spectrum の
 energy 分布に等しい。

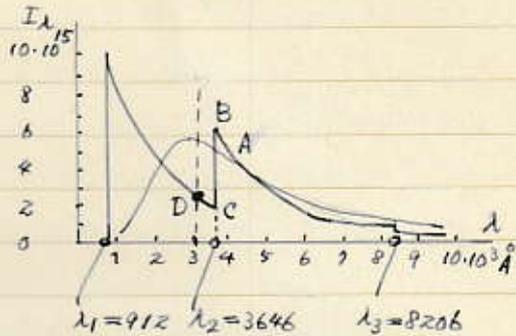
最初の第一近似では求めた温度分布は、星の表面での flux
 σT_e^4 を与える。もし天球中心から r 、 πF の一定した表面 ($\xi=0$) での
 温度、かなり深く $r \rightarrow \infty$ 得られていなければならない。

更に第一近似に依りては、次の手順に可なりである。第一近似で
 得た温度分布 $T(\xi)$ に基いて一連の ξ (従って T) の値に対して
 ()、() から $I\nu$ 、 $I\nu'$ を決めることができる。従って之等の ξ 、 T の
 値に対して () から $J\nu$ を決める。数値微分を可なり、 $dJ\nu/d\xi$ を
 求める。之を基本式 () に代入して同じ計算を繰返すのである。

§ 3. Comparison of theory and observation

前節に説明した理論に従って第一近似で数値計算を行った結果の中、理論的に重要なものを述べる。

図は前節の方法で $T_e = 10,500^\circ$ の星の連続 spectrum の energy 分布を計算したもので、比較のため同じ温度に對する Planck function B_λ も描いてある。



星の輻射の最も若い性質は、

系外極限に於いて、平均強度 \bar{I}_λ は

不連続のありとせらる。この不連続の原因は容易に説明できる。その為には、水素原子の吸収係数(κ)を思い出す。その中で、Balmer 系外極限を越えたすぐの所で、吸収係数が非常に大きくなる。従ってこの波長域の輻射は深部から減らされるにせらる。吾々は星の光球の極く上部部の、温度の比較的低い層(表面層に在る)からこの輻射が外に観測される。従って上面で見ると、Balmer 系外極限を越えたすぐの所、(CD部)の強度は比較的弱い。實際、Cの部分では、平均輻射強度 \bar{I}_λ は、表面層に對する Planck 強度 B_λ に近くなる。一方、Balmer 系外極限手前の所(AB部)では、吸収係数は比較的弱く、その為、輻射は、光球のかなり深い、比較的高温層から来るので、 \bar{I}_λ はかなり大きくなる。他の系外極限に對する不連続も、全くに説明できる。

理論曲線の第一の特徴は、spectrum のある部分に對する色温度 T_e の有效温度 T_e が若くすにせらる。一般に波長ととも表るといふとせらる。上の $T_e = 10,500^\circ$ の曲線では、

$$T_e = 11,000^\circ \quad \text{at } \lambda = 3350 \text{ \AA} \quad (\text{Balmer limit を越えた所})$$

$$T_e = 19,000^\circ \quad \text{at } \lambda = 4400 \text{ \AA} \quad (\text{Balmer limit の手前})$$

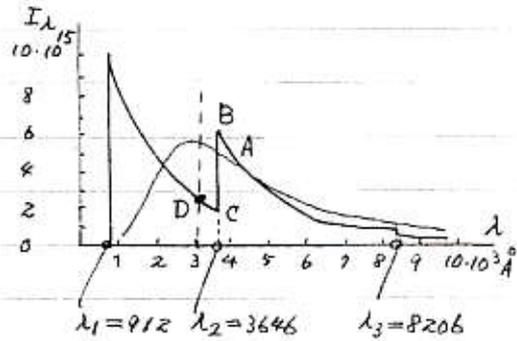
$$T_e = 15,000^\circ \quad \text{at } \lambda = 5500 \text{ \AA}$$

即ち、 $T_e = 105,000^\circ$ の星に於いて、 \bar{I}_λ の形は、 $T = T_e$ の Planck 曲線と若く異なる。これは、次の二つの事實に基いて起る。

§ 3. Comparison of theory and observation

前節に説明した理論に従って第一近似で数値計算を行った結果の中、理論的に重要なものを述べよう。

図は前述の方法で $T_e = 10,500^\circ$ の星の連続 spectrum の energy 分布を計算したものである。比較のために同じ温度に対する Planck function B_λ も描かれている。



星の輻射の最も著しい特徴は、

系列極限において、平均強度 \bar{I}_λ は

不連続のありこぼれている。この不連続の原因は容易に説明できる。その為には、水素原子の吸収係数（図）を思い出す。その図で、Balmer 系列極限を越えすぐの所で、吸収係数が非常に大きくなる。従ってこの波長域の輻射は深部から減らされることになり、一方は星の光球の極く上部部の、温度が比較的低温（表面温度に近い）からくる輻射だけを観測している。従って上面で見ると、Balmer 系列極限を越えすぐの所（CD部）の強度は比較的弱い。實際Cの部分では、平均輻射強度 \bar{I}_λ は、表面温度に対する Planck 強度 B_λ に近くなる。一方、Balmer 系列極限手前の所（AB部）では、吸収係数は比較的小さく、その為、輻射は光球のかなり深い、比較的高温部から来るため、 \bar{I}_λ はかなり大きくなる。他の系列極限における不連続も、全く同様に説明できる。

理論曲線の第一の特徴は、spectrum のある部分における色温度 T_c の有効温度 T_e と著しく異なること、一般に波長 λ とともに表れることである。上の $T_e = 10,500^\circ$ の曲線では、

$$T_c = 11,000^\circ \quad \text{at } \lambda = 3350 \text{ \AA} \quad (\text{Balmer limit を越えすぐ})$$

$$T_c = 19,000^\circ \quad \text{at } \lambda = 4400 \text{ \AA} \quad (\text{Balmer limit の手前})$$

$$T_c = 15,000^\circ \quad \text{at } \lambda = 5500 \text{ \AA}$$

即ち、 $T_e = 105,000^\circ$ の星に対して、 \bar{I}_λ の形は、 $T = T_e$ の Planck 曲線と著しく異なる。この状態は、次の二つの事実に基づいて起る。

1. 太陽内の温度変化.

2. k_{ν} or frequency ν に関すること.

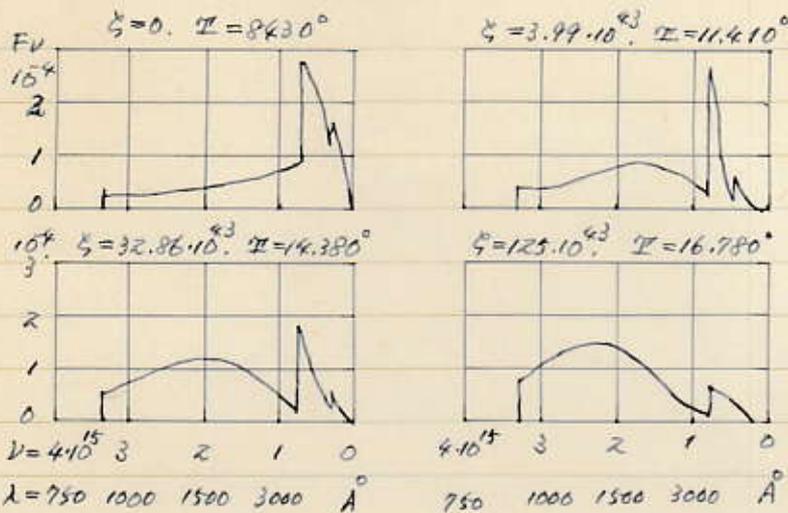
例として、太陽内の温度が一定で T_e に等しいとすれば、 k_{ν} や ν によって変化するとしても、各波長に対して $I_{\nu} = B_{\nu}(T_e)$ に等しいと仮定する。

B, C に対応する intensity をそれぞれ I_B, I_C とすれば、

$$D = \log(I_B / I_C)$$

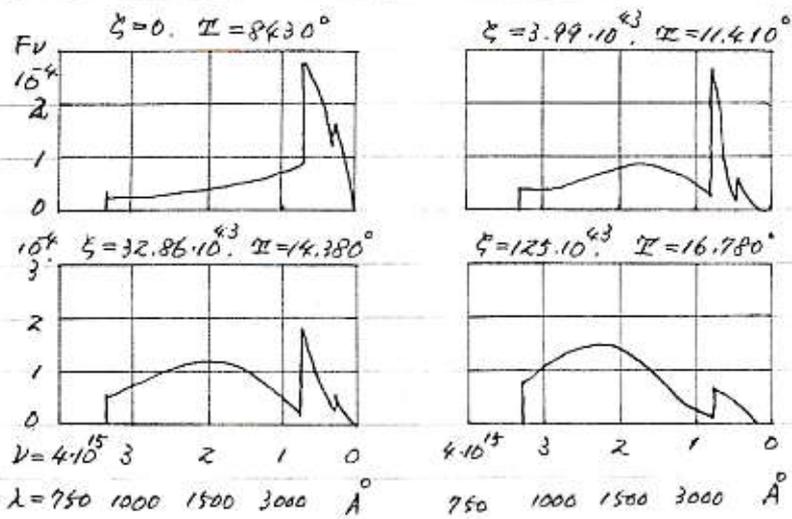
の量を、Balmer series limit に対応する不連続性 (Balmer discontinuity) とする。図は、手前の曲線は、もっと高温。例として、 $T_e = 15,000^{\circ}, 20,000^{\circ}$ に対応する値を示す。 T_e の増加によって discontinuity D は減少する。

T_e	D	λ_0	$\lambda_0^{(F)}$	Sp.
10,500	0.49	8430	8830	A0
15,000	0.22	11,880	12,610	B5
20,000	0.10	16,300	16,820	B2.



上図は、 $II_e = 10,500^\circ$ の星に於いて、老球内の種々の深さ ζ に対する単色 flux F_ν を描いたものである。老球の深さ ζ に行くに従って flux F_ν の frequency の大いなる方へ移行する net flux (曲線の面積) は一定に保たれていくと見られる。

吸収線に關する多くの考察から、有効温度 $II_e = 10,500^\circ, 15,000^\circ, 20,000^\circ$ は夫々 A0, B5, B2 型の spectrum を持つ星に相当するといわれる。之等の場合、 II_e を与える理論曲線は、Balmer discontinuity D の値に依り、又、種々の spectrum 域に於ける II_e の値に依り、視測と非常によく合ふ。之等のことから、吾々の最初、B2 ~ A0 型星の老球内の輻射平衡の仮定と仮定した II_e の本値は、之等とよく合ふと見られる。同様に、輻射の吸収が主として水素に依る決り仮定した II_e の本値も、之とよく合ふと見られる。



上図は、 $\Pi_e = 10,500^\circ$ の星について、光球内の種々の深さ ζ に対する単色 flux F_ν を描いたものである。光球の深さ愈々に行くと愈々 flux F_ν の frequency の大さき方へ移行するが net flux (曲線内の面積) は一定に保たれていかに判る。

吸収線に關する多くの考察から、有效温度 $\Pi_e = 10,500^\circ, 15,000^\circ, 20,000^\circ$ は夫々 A0, B5, B2 型の spectrum を持つ星に相当するに判る。之等の場合、 Π_e を与へた理論曲線は、Balmer discontinuity D の値についても、又、種々の spectrum 域における Π_e の値についても、視測と非常によく合ふ。之等のことから、吾々が最初、B2 ~ A0 型星の光球内の輻射平衡を仮定すると決定したに判る本値は、之と一致するに判る。同様に、輻射の吸収が主として水素に依ることを仮定したに判る又、之も一致するに判る。

§ The colour temperature of stars.

星の連続スペクトル内のエネルギー分布は星のスペクトル型によって非常に異なっている。従ってそれを調べるには、星の輻射と地上の標準光源の輻射とを波長ごとに比較しなければならない。又星の連続スペクトルは、地球大気の吸収により歪むから、それを補正しなければならない。(非常に困難である)。

標準光源のエネルギー分布は黒体輻射を用いる。実質的に Planck の法則は、

$$B = C_1 \lambda^{-5} (e^{C_2/\lambda T} - 1)^{-1} \quad (1)$$

$$= C_1 \tilde{\nu}^5 (e^{C_2 \tilde{\nu}/T} - 1)^{-1}$$

と書ける。 $\tilde{\nu} = 1/\lambda$ は波数 wave number であり、常数 C_1, C_2 は

$$C_1 = 2\pi^5 k^4 / 15 = 3.70 \cdot 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \quad (2)$$

$$C_2 = hc/k = 1.4323 \text{ cm} \cdot \text{deg.}$$

である。(1)式をかぎり高温で求めて、黒体のエネルギー分布を描き、それに星のエネルギー分布を重ねる。(縦座標は任意にとり、或る常数因子をかける)。このとき、属かぎり広い波長域に亘る星のエネルギー分布の、或る一定温度の黒体輻射とほぼ、対応が比較される。各々の場合、考慮するスペクトル領域で、星のエネルギー分布に最も似ているエネルギー分布を持つ黒体の温度を、その領域における星の色温度といふ。

星の色温度 T_2 を求めるには、実際的には、普通、次のようにする：温度 T_1 の判別する標準光源(例えばタングステン電球)と、星との間に、単色等級差 $(m_2 - m_1)$ を種々の波長に対して測定する。すなわち、 $(m_2 - m_1)$ を波数 $\tilde{\nu} = 1/\lambda$ に対して描く。若し、星のエネルギー曲線が黒体のものと十分似ていれば、その測定結果は、一つの直線に沿って並ぶ。その直線の傾斜が温度 T_2 を與える。

次にその理由を説明する。Planck の公式(1)により、二つの光源の、同じ波数 $\tilde{\nu}$ における輻射強度の比は、

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{e^{C_2 \tilde{\nu}/T_2} - 1}{e^{C_2 \tilde{\nu}/T_1} - 1} \quad (3)$$

従って、等級差は、定義により、

$$m_2 - m_1 = 2.5 \log \frac{B_1}{B_2}$$

$$= 2.5 [\log(e^{c_2 \tilde{\nu}/\lambda_1} - 1) - \log(e^{c_2 \tilde{\nu}/\lambda_2} - 1)] + k. \quad (4)$$

但し、 k は波長に無関係な定数の定数である。この式を $\tilde{\nu}$ で微分すれば、

$$\frac{d(m_2 - m_1)}{d\tilde{\nu}} = 2.5 \log_{10} e \cdot [\phi(\lambda_2) - \phi(\lambda_1)] \quad (5)$$

但し、 $\phi(\lambda) = \frac{c_2}{\lambda} (1 - e^{-c_2 \tilde{\nu}/\lambda})^{-1}$ (6)

である。座標 $\phi(\lambda)$ は、温度 T における絶対傾斜と呼ばれる。波数 $\tilde{\nu}$ の変化に伴って、極く僅かに変化しないので、波長域に亘る $\tilde{\nu}$ に関してはほぼ見做し差支えない。その結果、 $d(m_2 - m_1)/d\tilde{\nu}$ は、實質的に $\tilde{\nu}$ に無関係、即ち $m_2 - m_1$ は $\tilde{\nu}$ の一次函数であり、直線となる。

更に、

$$G_{2,1} = \frac{d(m_2 - m_1)}{d\tilde{\nu}} \cdot \frac{1}{2.5 \log_{10} e} = 0.921 \frac{d(m_2 - m_1)}{d\tilde{\nu}} \quad (7)$$

従って、

$$G_{2,1} = \phi(\lambda_2) - \phi(\lambda_1) \quad (8)$$

を、光源 1. に対する光源 2. の相対傾斜と呼ぶ。

上述の直線の傾斜は、相対傾斜 $G_{2,1}$ を要し、更に更に $\phi(\lambda_1)$ を加えれば $\phi(\lambda_2)$ が求められる。更に最後に星の色温度 T_2 が求められる。

若し、測定直線の直線に沿って並べられる星のスペクトル中のエネギー分布の星々のエネギー分布と見られ得ない結論(計測)がある。この場合には、星の色温度を定義することはできない。