

## Chapter 5.

### 恒星光球の輻射平衡

Radiative Equilibrium of the Stellar Photosphere

### 輸達方程式の解

The Solution of the Transfer Equation

§ 1. 輻射平衡の条件

§ 2. 特別な場合の輻射平衡の条件

§ 3. 輸達方程式の形式解

## § 1. 輻射平衡の条件 The condition of the radiative equilibrium

星の中心部で核融合によって生成されたエネルギーは外方に拡がり、大気を通過して、遂には表面から輻射として放出される。

正常星では大気そのものにはエネルギーの source や sink はなく、内方から受け取る全エネルギーを外方に輸達するだけである。即ち、大気は受け取った輻射の振動数分布を変えたり、輻射とそれ以外の形のエネルギーの配分を変えたりすることはできるが、全体としてのエネルギーは厳密に保存される。

我々の目的の一つは、星の大気中で温度などの物理性質がどのように変わるかを知ることである。今光球内に体積要素  $\Delta v$  を考える。この  $\Delta v$  が周囲から毎秒得るエネルギーを  $E^+$ 、周囲へ出すエネルギーを  $E^-$  とすれば、 $\Delta v$  内部の温度はこのエネルギー収支で決り、若し  $E^+ > E^-$  であれば内部のエネルギーは増加して温度が上昇し、逆に  $E^+ < E^-$  であれば温度は低下する。しかし、定常的な星の光球では、どの体積要素も温度は一定で、時間的に変化しない。これは

$$E^+ = E^- \quad (1)$$

の時だけに起り、これをエネルギー平衡の条件という。

一般に星の大気中のエネルギーの輸達 mode は、主に輻射と対流である。全エネルギーが輻射で運ばれ、それによってエネルギー平衡が成り立つ場合を輻射平衡と言ひ、逆に対流による場合を対流平衡と言う。

対流が起こらずに輻射平衡が成り立つための判別式はシュバルツシルト K. Schwarzschild によって提唱された。それによると、太陽光球では輻射がエネルギー輸達の主要な mode であり、光学的深さ  $\tau \sim 1$  あたりまでは輻射平衡が成立っており、その下には水素電離のために不安定になり、対流層が生じている。このような輻射領域の下の水素対流層は F 5 型より晩期のすべての星に存在し、それより早期の星では外層大気全部を通じて輻射平衡が成立っている。

輻射平衡の場合、 $E^+$  及び  $E^-$  はそれぞれ、 $\Delta v$  が毎秒吸収及び放出する輻射エネルギーの量である。

### 1. 1. エネルギー増 Energy gain $E^+$

星の大気中の質量要素  $dm$  ( $= \rho \Delta v$ ) は毎秒

$$E^+ = dm \int_{\nu} \int_{\omega} I_{\nu} k_{\nu} d\nu d\omega = 4\pi dm \int_0^{\infty} k_{\nu} J_{\nu} d\nu \quad (2)$$

のエネルギーを吸収する (注1)。ここで  $k_{\nu}$  は減光係数であり、一般には真の吸収  $\kappa_{\nu}$  と散乱  $\sigma_{\nu}$  を含んでいる。

$$k_{\nu} = \kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}$$

### 1. 2. エネルギー減 Energy loss $E^-$

質量要素  $dm$  が毎秒放出する輻射エネルギーは、熱的放出  $j_{\nu}^{\dagger}$  と散乱放出



$j_\nu^e$  (coherent 等方散乱と仮定する) を含む全放出係数  $j_\nu = j_\nu^i + j_\nu^e$  により

$$E^- = dm \int_\nu \int_\omega j_\nu d\omega d\nu = 4\pi dm \int_0^\infty k_\nu S_\nu d\nu \quad (3)$$

但し、 $S_\nu$  は源泉関数であり

$$S_\nu = j_\nu / k_\nu = (j_\nu^i + j_\nu^e) / (\kappa_\nu + \sigma_\nu)$$

### 1. 3. エネルギー平衡 $E^+ = E^-$

(2), (3) 式を (1) 式に代入すれば、輻射平衡の条件は、大気中の各点での輻射強度  $I_\nu$  が次の関係を満たすことを必要とする。

$$\int_\nu \int_\omega k_\nu I_\nu d\omega d\nu = \int_\nu \int_\omega j_\nu d\omega d\nu \quad (4)$$

或いは

$$\int_0^\infty k_\nu J_\nu d\nu = \int_0^\infty k_\nu S_\nu d\nu \quad (5)$$

注1: (2) 式の証明

$\Delta v$  を含む閉曲面  $\Sigma$  を考え、その上の点  $P$  を含む面要素  $d\Sigma$  を通り、 $S$  方向に、 $\Delta v$  の面要素  $d\sigma$  を毎秒通り抜ける輻射エネルギーは

$$I_\nu d\Sigma \cos\theta d\Omega d\nu$$

但し、 $d\Omega$  は  $P$  点から見て  $d\sigma$  の張る立体角であり、

$$d\Omega = d\sigma \cos\theta / r^2$$

だから、その輻射は  $I_\nu (\cos\theta \cos\theta / r^2) d\sigma d\Sigma d\nu$  であり、これが  $\Delta v$  内を通過している間に吸収される量は、それに  $k_\nu \rho ds$  を掛けたものであり、このような吸収を全部集めると

$$(E^+)_\nu d\nu = \int \int k_\nu \rho ds I_\nu (\cos\theta \cos\theta / r^2) d\sigma d\Sigma d\nu$$

ここで  $d\sigma$  から見た  $d\Sigma$  の張る立体角  $d\omega$  は

$$d\omega = d\Sigma \cos\theta / r^2$$

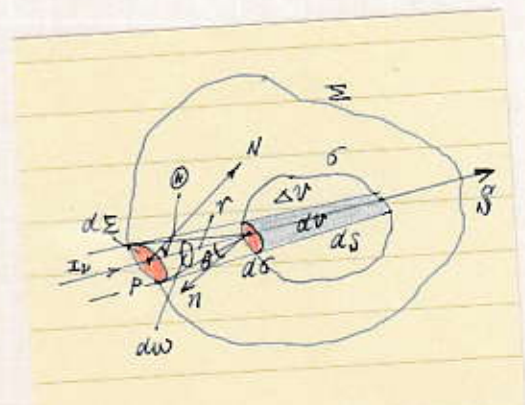
であり、 $\Delta v$  内の光束の微小 cylinder を

$$dV = d\sigma \cos\theta ds$$

とすれば

$$\begin{aligned} (E^+)_\nu d\nu &= k_\nu \rho d\nu \int_\nu \int_\omega I_\nu d\omega d\nu \\ &= k_\nu \rho d\nu \Delta v \int_\omega I_\nu d\omega \\ &= k_\nu dm d\nu \int_\omega I_\nu d\omega \end{aligned}$$

最後に全振動数について積分すれば (2) 式が得られる。



## § 2. 特別な場合の輻射平衡の条件

### 2. 1. LTE条件に対する輻射平衡

厳密にLTE熱放出だけで、散乱のない場合には源泉関数は $S_\nu = B_\nu$ で、減光係数は $k_\nu = \kappa_\nu$ であるから、(§1.5)式は

$$\int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu \quad (\text{LTE}) \quad (1)$$

また、LTE熱放出と coherent 等方散乱とがある場合、源泉関数 $S_\nu$ は

$$S_\nu = (\kappa_\nu / k_\nu) B_\nu + (\sigma_\nu / k_\nu) J_\nu, \quad k_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$$

だから、(§1.5)式で

$$\text{左辺: } \int_0^\infty k_\nu J_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu + \int_0^\infty \sigma_\nu J_\nu d\nu$$

$$\text{右辺: } \int_0^\infty k_\nu S_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu + \int_0^\infty \sigma_\nu J_\nu d\nu$$

となり、散乱項は両辺で相殺され、やはり(1)式が導かれる。

$$\int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu \quad (\text{LTE}) \quad (1)$$

一般的に散乱には方向や振動数について、エネルギーを再配分する可能性があるが、今それを無視して coherent 等方散乱を仮定しているのだから、輻射平衡が成立つのは物理的にも明らかである。

若し吸収係数 $\kappa_\nu$ が振動数 $\nu$ に無関係な灰色物質、即ち、 $\kappa_\nu = \kappa = \text{const}$ の時、(1)式でそれが積分記号の外に出て

$$J = B = (\sigma / \pi) T^4 \quad (\text{LTE, Grey}) \quad (2)$$

但し、 $J = \int_0^\infty J_\nu d\nu$ ,  $B = \int_0^\infty B_\nu d\nu = (\sigma / \pi) T^4$  はそれぞれ全輻射に対する平均強度、プランク強度である。

これらの式から明らかになる重要な事実は、全熱的放出が、輸達方程式の解で決まる平均強度 $J_\nu$ によって決まる値になっていること、即ち、各点の局所的な源泉関数の値が大気の全体的な輻射場の性質と関連していることである。(2)式で、特に輻射平衡の条件が、大気中の輻射場が全体として調和する局所的溫度を決定するということがわかる。



## 2. 2. 平行平面大気に対する輻射平衡

前章で求めた平行平面大気の輸送方程式

$$(1/\rho) \mu (dI_\nu/dz) = j_\nu - k_\nu I_\nu$$

の両辺を全立体角、全振動数に互って積分する。 $\omega, \nu, z$ は互いに独立だから

$$(1/\rho)(d/dz)(\int_0^\infty \int_\omega I_\nu \mu d\omega d\nu) \\ = \int_\nu \int_\omega j_\nu d\omega d\nu - \int_\nu \int_\omega k_\nu I_\nu d\omega d\nu$$

右辺は(§1.4)式により 0、左辺の微分記号内は全輻射真流量 $\mathcal{F}$ に等しく

$$(d/dz)(\int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu) = d\mathcal{F}/dz = 0 \quad (3)$$

となる。即ち、この場合の輻射平衡の条件は

『全輻射の真流量 $\mathcal{F}$ は深さに無関係に一定である。』

ということと同等である。

これは曲率の無視できる平面層大気の場合だけであって、曲率を考慮しなければならぬ広がった大気では成立しない。

また、この一定さは全輻射の真流量 $\mathcal{F}$ についてだけ成立するのであって、個々の振動数の単色輻射の真流量 $\mathcal{F}_\nu$ は深さとともに変る。しかし  $\mathcal{F} = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu$  が一定なのだから、大気中の深さとともにスペクトルの成分が互いに交換するだけで、実際、光球の内部ほど短波長の輻射が優勢である。

全流量 $\mathcal{F}$ が大気中の深さに対して一定値を持つので、その値はこの大気を指定する unique な parameter になり得る。星の表面から放出される輻射は決してある温度の Planckian にはなっていないが、それにも拘わらず (Planckian から導かれた Stefan の法則  $\mathcal{F} = \sigma T^4$  によって)、 $\mathcal{F}$  を温度単位に変換した有効温度  $T_{\text{eff}}$  は、その大気を指定する有効な parameter になり得る。

§ 3. 輸達方程式の形式解 Formal solution of the transfer equation

我々は輸達方程式

$$\mu \{dI_\nu(\tau_\nu, \mu)/d\tau_\nu\} = I_\nu(\tau_\nu, \mu) - S_\nu(\tau_\nu) \quad (1)$$

の解を求め、輻射場  $I_\nu(\tau_\nu, \mu)$  を知りたいのであるが、源泉関数  $S_\nu(\tau_\nu)$  は前述のように、その輻射場によって決る未知の関数である。LTE を仮定すれば  $S_\nu(\tau_\nu)$  が Planckian  $B_\nu(T)$  に等しくなることが判かっているが、深さに対する温度  $T(\tau_\nu)$  という輻射場の性質がまだ未知であるため、深さの関数としての Planckian  $B_\nu(\tau_\nu) = B_\nu\{T(\tau_\nu)\}$  も未知である。即ち、解けた後に判る未知関数を含んだ方程式を解かねばならない。

若し、 $S_\nu(\tau_\nu)$  が既知関数であれば、(1)式は線型一階の微分方程式であるから容易に解ける。そこで先ず  $S_\nu(\tau_\nu)$  を既知関数と見なして (1)式の形式解を求めておこう。

式の煩雑さを避けるために suffix  $\nu$  を省略することにする。(  $\nu$  を書かない全輻射の場合と間違えないように！) すると (1)式は

$$\mu \{dI(\tau, \mu)/d\tau\} = I(\tau, \mu) - S(\tau) \quad (1)$$

積分因子  $\exp(-\tau/\mu)$  により、

$$d\{I(\tau, \mu) \exp(-\tau/\mu)\}/d(\tau/\mu) = -S(\tau) \exp(-\tau/\mu) \quad (2)$$

従って、ある深さ  $\tau_0$  から問題にする深さ  $\tau$  まで積分することにすれば、積分常数を  $c$  として一般解は、

$$I(\tau, \mu) = -\exp(\tau/\mu) \{c + \int_{\tau_0 \rightarrow \tau} S(t) \exp(-t/\mu) / d(t/\mu)\} \quad (3)$$

先ず外向きの輻射  $\mu \geq 0$  を考える。 $\tau_0$  を大気 base の光学的深さとし、base における境界条件：

$$\tau = \tau_0 \text{ において } I(\tau, \mu) = I(\tau_0, \mu) \quad (4)$$

によって積分常数  $c$  を決定すれば、

$$c = -I(\tau_0, \mu) \exp(-\tau_0/\mu) \quad (5)$$

となるから

$$\begin{aligned} I(\tau, \mu) &= I(\tau_0, \mu) \exp\{-(\tau_0 - \tau)/\mu\} \\ &\quad + \int_{\tau \rightarrow \tau_0} S(t) \exp\{-(t - \tau)/\mu\} d(t/\mu) \quad (0 \leq \mu \leq 1) \end{aligned} \quad (6)$$

特に、光学的に非常に深い層を半無限大気 semi-infinite atmosphere と呼び、 $\tau_0 \sim \infty$  と置けば base からの影響が消えて

$$I(\tau, \mu) = \int_{\tau \rightarrow \infty} S(t) \exp\{-(t - \tau)/\mu\} d(t/\mu) \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (7)$$



光球の表面から  $\theta$  方向に放出される輻射強度 emergent intensity は、 $\tau=0$  と置き、

$$I(0, \mu) = \int_0^{\infty} S(t) \exp(-t/\mu) d(t/\mu) \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (8)$$

となる。

次に、内向きの輻射  $\mu \leq 0$  を考える。(3)式で  $\tau_0$  を大気表面、即ち、 $\tau_0=0$  とし、表面における境界条件：

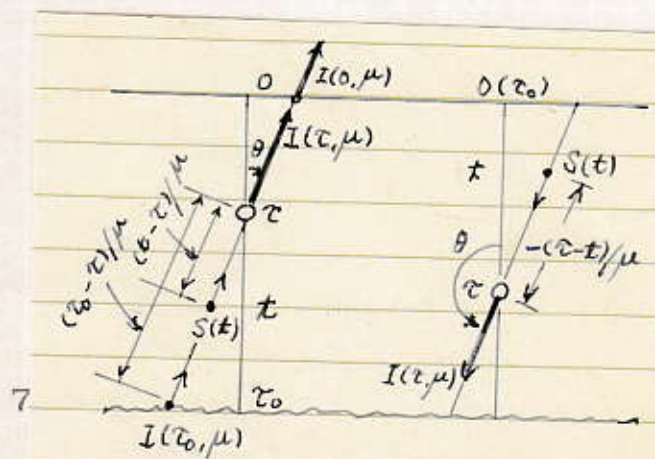
$$\tau = \tau_0 = 0 \text{ において } I'(\tau, \mu) = I'(0, \mu) = 0 \quad (-1 \leq \mu \leq 0) \quad (9)$$

を用いると、この場合には  $c=0$  となって

$$I'(\tau, \mu) = - \int_{0 \rightarrow \tau} S(t) \exp\{(\tau-t)/\mu\} d(t/\mu) \quad (-1 \leq \mu \leq 0) \quad (10)$$

(6)~(10)式は、若し源泉関数  $S(\tau)$  が与えられれば、輸送方程式の完全な解となる。

これらの式の物理的意味は明らかである。大気内の各点( $\tau$ )の輻射強度は、 $\theta$  方向にそこに達するまでの各点( $t$ )における源泉関数  $S(t)$  に、そのエネルギーが透過し得る割合を掛けて集めた加重和 weighted sum であることを述べているに過ぎない。



#### § 4. 輸達方程式のエディントン解

輸達方程式の解法を理解するため、ここでは星の光球内の各深さでの吸収係数  $\kappa_\nu$  が振動数  $\nu$  に依存しない

$$\kappa_\nu = \kappa = \text{const.} \quad (1)$$

の場合の輻射平衡を考える。このような大気を灰色大気 (Grey atmosphere) と言う。現実の大気では吸収係数は振動数によって選択性があり、灰色ではないが、 $\kappa_\nu$  のある荷重平均  $\kappa$  を使うとすれば、ここでの議論はそのまま成立つ。

源泉関数  $S_\nu(\tau_\nu)$  は LTE の条件で Planckian  $B_\nu(\tau_\nu)$  になるが、前節ではこれを既知関数と見なして形式解  $I_\nu(\tau_\nu, \mu)$  を求めておいた。次の問題は光球内の各深さにおける  $B_\nu(\tau_\nu)$  を求めること、従って、それはまた温度分布  $T(\tau_\nu)$  を求めることであり、それによって形式解から輻射場が決定できる。

#### ★ エディントン近似

輸達方程式を直接、厳密に解こうとすれば、微積分方程式の解を求めることになり、数学的に非常に難しい。そこで、種々な方法で一旦第 1 近似解を求め、それを前の形式解の積分表示に代入して第 2 近似を求める。このようにして逐次近似により正しい解に接近することができる。

ここで先ずエディントンの解法を考える。(1)により光学的深さも振動数  $\nu$  に無関係となり

$$d\tau = -\kappa \rho dz \quad (2)$$

だから、輸達方程式は

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau, \mu)}{d\tau} = I_\nu(\tau, \mu) - B_\nu(\tau)$$

となる。ここで単色輻射でなく、全輻射を問題にすることにしよう。両辺を  $\nu$  で積分し、

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - B(\tau) \quad (3)$$

ここでエディントンは全輻射強度  $I(\tau, \mu)$  に対する次のようなモーメントを定義する。オペレーター  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \dots d\mu$  は全立体角についての平均を取ることを意味する。

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu \quad (4)$$

$$H(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu = \mathcal{F}(\tau)/4\pi = F(\tau) \quad (5)$$

$$K(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu^2 d\mu = (c/4\pi)P_r(\tau) \quad (6)$$



次に (3)式の両辺の  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \dots d\mu$  (0 次のモーメント) を取れば、 $B(\tau)$  は等方的で積分の外に出て

$$\begin{aligned} (d/d\tau) \{ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu \} \\ = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu - \frac{1}{2} B(\tau) \int_{-1}^1 d\mu \end{aligned}$$

これは定義により

$$(1/4) dF(\tau)/d\tau = J(\tau) - B(\tau) \quad (7)$$

次に、(3)式の両辺の  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu \dots d\mu$  (1 次のモーメント) を取れば

$$\begin{aligned} (d/d\tau) \{ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu^2 d\mu \} \\ = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu - \frac{1}{2} B(\tau) \int_{-1}^1 \mu d\mu \\ = 0 \end{aligned}$$

即ち

$$dK(\tau)/d\tau = (1/4)F(\tau) \quad (8)$$

ここで近似を行う。(6)式を見ると  $K(\tau)$  は、 $I(\tau, \mu)$  と  $\mu^2$  との積を全立体角で平均した形になっているが、これを全立体角について  $I(\tau, \mu)$  の平均と、 $\mu^2$  の平均との積で近似する (エディントン近似)。即ち

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \cdot \mu^2 d\mu \\ &\approx \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu \times \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu \\ &= J(\tau) \quad = 1/3 \end{aligned}$$

即ち

$$K(\tau) \approx (1/3)J(\tau) \quad (9)$$

これにより (8)式は

$$dJ(\tau)/d\tau = (3/4)F(\tau) \quad (10)$$

一般の問題では  $B(\tau)$  は複雑であるが、LTE を仮定し、純粹輻射平衡の成り立つ時は、(§2.2)式により

$$S(\tau) = B(\tau) = J(\tau) \quad (11)$$

である。これを (7)式に代入すれば

$$dF(\tau)/d\tau = 0 \quad (12)$$

即ち、純粹輻射平衡の場合、真流量が各深さについて不変、

$$F(\tau) = F = \text{const.}$$

であることを意味している (§2.2)。

$F(\tau)$  が  $\tau$  に無関係だから (10)式は直ちに積分できて

$$J(\tau) = (3/4)F\tau + c = B(\tau) = S(\tau) \quad (13)$$

積分常数  $c$  を決めるには、光球表面における境界条件が必要である。厳密には、この  $B(\tau)$  を前節の形式解 (§3.10) の源泉関数  $S(\tau)$  として代入し、内向き強度  $I'(\tau, \mu)$  を求め、これが大気表面 ( $\tau = 0$ ) で 0 になる、即ち、 $I'(0, \mu) = 0$  を用いるべきであるが、粗い近似を使ったエディントン第1近似で得られた(13)式の解、 $J(\tau) = B(\tau)$  は任意の  $c$  でそれが満たされ、 $c$  は決定できない(注1)。このため簡略化した境界条件を用いる。

光球表面  $\tau = 0$  で平均強度は  $J(0)$  であるから、表面から放出される輻射量は上半球の立体角  $2\pi$  を掛けて  $2\pi J(0)$  である。一方、表面における真流量は、 $\mathcal{F} = \pi F$  だから、これを等置して、境界条件は

$$\tau = 0 \quad \text{で} \quad 2J(0) = F \quad (14)$$

となる。これを(13)式に代入すれば積分常数  $c = F/2$  が決り、(13)式は

$$J(\tau) = B(\tau) = (F/4) \{2 + 3\tau\} = S(\tau) \quad (15)$$

強度はこの源泉関数  $S(\tau)$  を形式解 (§3.7)、 (§3.10) 式に代入し

$$I(\tau, \mu) = (F/4) (2 + 3\mu + 3\tau) \quad \mu \geq 0 \quad (16)$$

$$I'(\tau, \mu) = (F/4) [(2 + 3\mu) \{1 - \exp(-\tau/\mu)\} + 3\tau] \quad \mu \leq 0 \quad (17)$$

これがエディントンの第1近似である。

これらを(4)、(5)式に代入すると

$$J(\tau) = (F/4) \{2 + 3\tau - E_2(\tau) + \frac{1}{2} 3E_3(\tau)\} = S(\tau) \quad (18)$$

$$F(\tau) = \frac{1}{2} F \{2 - \tau E_2(\tau) - 2E_3(\tau)\} \quad (19)$$

但し、ここで

$$E_n(\tau) = \int_0^\infty \exp(-\tau x) x^{-n} dx \quad (20)$$

は指数積分関数である。第2近似の源泉関数(18)を第1近似(15)と比較すれば、それらは  $2E_2(\tau) = 3E_3(\tau)$  の時に一致する。それは  $E_2(\tau), E_3(\tau) \rightarrow 0$  となる  $\tau \rightarrow 0$  の場合と、 $\tau \approx 0.42$  の場合である。このため第2近似は  $\tau \leq 0.42$  の表面層では、輻射が第1近似より弱くなり、 $\tau$  の大きい深い所では第1近似より強くなる。また、(19)式の  $F(\tau)$  は、 $\tau = 0, \tau = \infty$  においてだけ  $F(\tau) = F = \text{const.}$  となる。この真流量の、一定値  $\pi F$  からのずれは(19)式を導く基になった第1近似の源泉関数(15)の精度の悪さによるものである。精度を高めるには第2近似の源泉関数(18)を形式解に代入して、輻射強度を改めて求める。



注1:

(13)式の  $B(\tau) = (3/4)F\tau + c$  を

形式解 (§3.10) 式:  $I'(\tau, \mu) = -\int_0^\tau S(t) \exp\{(\tau-t)/\mu\} dt/\mu$  に代入すれば

$$\begin{aligned} I'(\tau, \mu) &= -\int_0^\tau \{(3/4)Ft + c\} \exp\{(\tau-t)/\mu\} dt/\mu \\ &= -(3/4)F\mu \int_0^\tau (t/\mu) \exp\{(\tau-t)/\mu\} dt/\mu \\ &\quad - c \int_0^\tau \exp\{(\tau-t)/\mu\} dt/\mu \end{aligned}$$

ここで、 $X \equiv t/\mu$ ,  $dX \equiv dt/\mu$ ,  $Y = \tau/\mu$  と置き

$$\begin{aligned} &= -(3/4)F\mu e^Y \int_0^Y X e^{-X} dX - c e^Y \int_0^Y e^{-X} dX \\ &= -(3/4)F\mu e^Y \left( -Xe^{-X} \Big|_0^Y + \int_0^Y e^{-X} dX \right) - c e^Y \int_0^Y e^{-X} dX \\ &= -(3/4)F\mu e^Y \left( -Y e^{-Y} - \left( -e^{-X} \Big|_0^Y \right) \right) + c e^Y \left( -e^{-X} \Big|_0^Y \right) \\ &= -(3/4)F\mu e^Y \left( -Y e^{-Y} - e^{-Y} + 1 \right) + c e^Y \left( e^{-Y} - 1 \right) \\ &= -(3/4)F \left\{ -\tau - \mu + \mu \exp(\tau/\mu) \right\} + c \left\{ 1 - \exp(\tau/\mu) \right\} \end{aligned}$$

従って、 $\tau = 0$  では、任意の  $c$  に対して

$$I'(0, \mu) = 0$$

が成立ち、 $c$  が決定できない。

★ エディントン第1近似の考察

(15)式により源泉関数 $B(\tau)$ は、光球の内部に行くにつれて、 $\tau$ の1次関数で増大し、輻射は星の内部から外方に流れる。

(17)式の $I'(\tau, \mu)$ で、 $\{1 - \exp(\tau/\mu)\}$  因子 ( $\mu \leq 0$ ) は、 $\tau$ が少し大きくなれば急速に1に接近するので、 $\tau \rightarrow \infty$  では

$$I(\tau, \mu) = (F/4)(2 + 3\mu + 3\tau)$$

$$I'(\tau, \mu) = (F/4)(2 + 3\mu + 3\tau)$$

即ち、 $I(\tau, \mu)$ も $I'(\tau, \mu)$ もほぼ等しくなり、 $\tau$ とともに1次関数で増大し、方向性は $\mu = \cos\theta$  という形で $\tau$ と独立に入っている簡単なものになる。従って $\tau \gg 1 \cong \cos\theta$  の深さでは $\mu$ 項は $\tau$ 項に比べて影響が無視できるようになり、輻射場は(15), (16), (17) から

$$I(\tau, \mu) \rightarrow (3/4) F \tau$$

$$I'(\tau, \mu) \rightarrow (3/4) F \tau$$

$$B(\tau) \rightarrow (3/4) F \tau$$

即ち、輻射強度 $I(\tau, \mu)$ ,  $I'(\tau, \mu)$ は光球内部に行くにつれて等方的になり、且つ Planck 強度 $B(\tau)$ に近づく。つまり、熱力学的平衡の条件が満たされるようになる。

LTE状態では $B(\tau)$ は Stefan の法則により、その点の温度 $T$ のみの関数であり、

$$\pi B(\tau) = \pi \int_0^\infty B_\nu(\tau) d\nu = \sigma T^4 \quad (21)$$

星の有効温度 $T_{eff}$ は星の表面 $1 \text{ cm}^2$ から1秒間にあらゆる方向に放出される全輻射流量を Stefan の法則で『温度』で表現した値で

$$\pi F = \sigma T_{eff}^4 \quad (22)$$

これはある意味では光球の平均的な温度と見なすこともできようが、星のスペクトルの波長分布は $T = T_{eff}$ の Planckian とはかなりずれている。(22)式より、半径 $R$ の星の光度 $L$ は

$$L = 4\pi R^2 \pi F = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (23)$$

である。

さて、(21), (22) 式を(15)式に代入すれば

$$T^4 = \frac{1}{2} T_{eff}^4 \{1 + (3/2)\tau\}$$

或いは (24)

$$T = (1/2)^{1/4} T_{eff} \{1 + (3/2)\tau\}^{1/4}$$

即ち、光球内の深さ $\tau$ に対する温度分布 $T(\tau)$ が得られた。特に光球表面 $\tau = 0$ における温度を表面温度 $T_0$ と言ひ、

$$T_0^4 = \frac{1}{2} T_{eff}^4$$

或いは (25)



$$T_0 = (1/2^{1/4}) T_{\text{eff}} \approx 0.841 T_{\text{eff}}$$

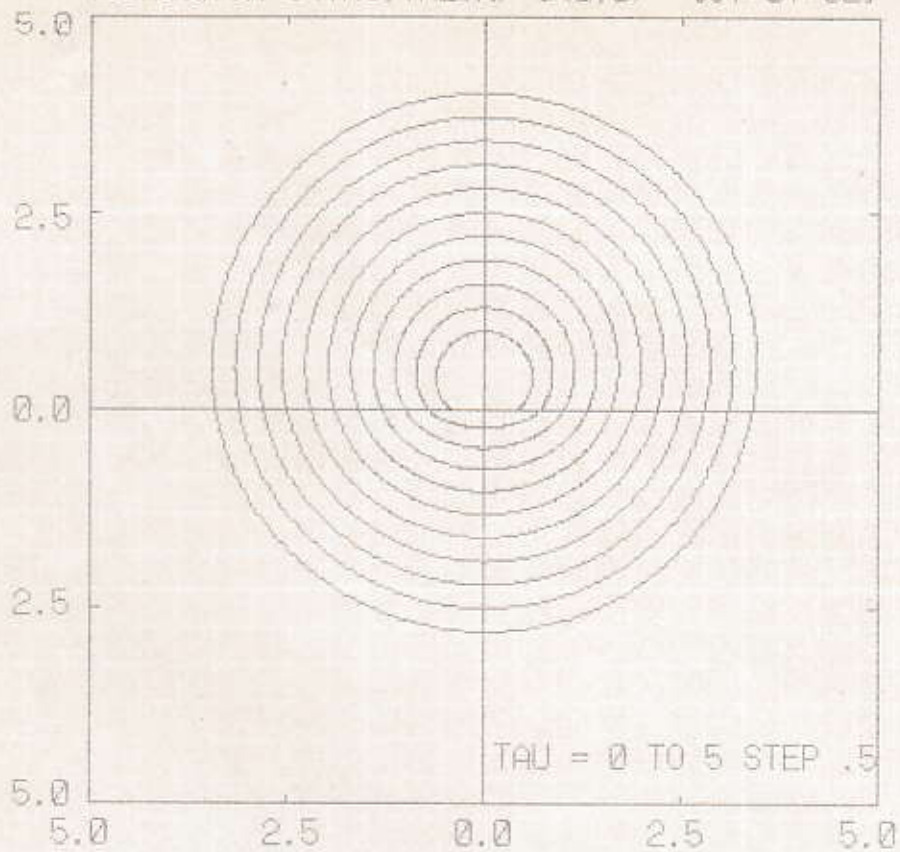
例えば、太陽常数の測定から得られた  $T_{\text{eff}\odot} = 5770\text{K}$  を代入してみると、 $T_{0\odot} = 4860\text{K}$  となる。 $T_{\text{eff}}$  が  $T_0$  より大きいのは、勿論、星が気体であって、表面温度に対する輻射だけでなく、少し内部の、従って少し高温の部分からの輻射も表面までの距離に応じた吸収を受けて寄与するからである。(24)式によれば  $\tau \sim 2/3$  の深さの光球温度が有効温度に等しい  $T(\tau \sim 2/3) \sim T_{\text{eff}}$  ことが判る。つまり、全輻射流量だけについて言えば、星は  $\tau \sim 2/3$  の深さの温度に対する Planckian  $B\{T(\tau \sim 2/3)\}$  を放出していることに相当する。

Eddington's first approximation

$\tau$	T	log T	$\tau$	T	log T
0.0	4860	3.687	6.0	8643	3.937
0.2	5190	3.715	6.2	8707	3.940
0.4	5466	3.738	6.4	8770	3.943
0.6	5706	3.756	6.6	8831	3.946
0.8	5919	3.772	6.8	8891	3.949
1.0	6112	3.786	7.0	8950	3.952
1.2	6287	3.798	7.2	9008	3.955
1.4	6449	3.810	7.4	9065	3.957
1.6	6600	3.820	7.6	9121	3.960
1.8	6741	3.829	7.8	9175	3.963
2.0	6874	3.837	8.0	9229	3.965
2.2	6999	3.845	8.2	9282	3.968
2.4	7118	3.852	8.4	9334	3.970
2.6	7231	3.859	8.6	9385	3.972
2.8	7340	3.866	8.8	9435	3.975
3.0	7443	3.872	9.0	9484	3.977
3.2	7543	3.878	9.2	9533	3.979
3.4	7638	3.883	9.4	9581	3.981
3.6	7731	3.888	9.6	9628	3.984
3.8	7820	3.893	9.8	9675	3.986
4.0	7906	3.898	10.0	9721	3.988
4.2	7989	3.903	10.2	9766	3.990
4.4	8070	3.907	10.4	9811	3.992
4.6	8148	3.911	10.6	9855	3.994
4.8	8225	3.915	10.8	9898	3.996
5.0	8299	3.919	11.0	9941	3.997
5.2	8371	3.923	11.2	9983	3.999
5.4	8442	3.926	11.4	10025	4.001
5.6	8510	3.930	11.6	10066	4.003
5.8	8578	3.933	11.8	10107	4.005
6.0	8643	3.937	12.0	10147	4.006



EDDINGTON I (TAU, THETA) / I (0,0) [87/07/02]



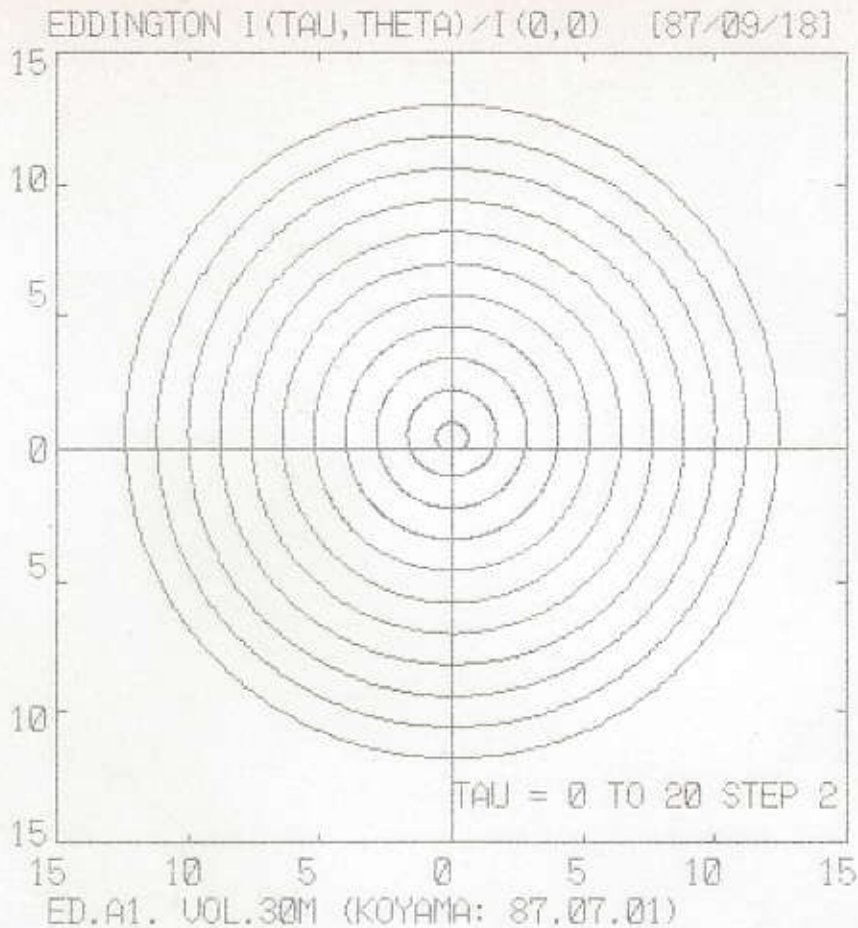
ED.A2. VOL.30M (KOYAMA: 87.07.01)

EDDINGTON I (TAU, THETA) / I (0,0)

ED.A2. VOL.30M (KOYAMA: 87.07.01)

[87/07/02]

THETA	TAU										
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	1.00	1.30	1.60	1.90	2.20	2.50	2.80	3.10	3.40	3.70	4.00
10	0.99	1.29	1.59	1.89	2.19	2.49	2.79	3.09	3.39	3.69	3.99
20	0.96	1.26	1.56	1.86	2.16	2.46	2.76	3.06	3.36	3.66	3.96
30	0.92	1.22	1.52	1.82	2.12	2.42	2.72	3.02	3.32	3.62	3.92
40	0.86	1.16	1.46	1.76	2.06	2.36	2.66	2.96	3.26	3.56	3.86
50	0.79	1.09	1.39	1.69	1.99	2.29	2.59	2.89	3.19	3.49	3.79
60	0.70	1.00	1.30	1.60	1.90	2.20	2.50	2.80	3.10	3.40	3.70
70	0.61	0.91	1.21	1.51	1.81	2.11	2.41	2.71	3.01	3.31	3.61
80	0.50	0.80	1.10	1.40	1.70	2.00	2.30	2.60	2.90	3.20	3.50
90	0.40	0.70	1.00	1.30	1.60	1.90	2.20	2.50	2.80	3.10	3.40
100	0.00	0.58	0.89	1.20	1.50	1.80	2.10	2.40	2.70	3.00	3.30
110	0.00	0.45	0.78	1.09	1.39	1.69	1.99	2.29	2.59	2.89	3.19
120	0.00	0.36	0.69	1.00	1.30	1.60	1.90	2.20	2.50	2.80	3.10
130	0.00	0.31	0.61	0.91	1.21	1.51	1.81	2.11	2.41	2.71	3.01
140	0.00	0.27	0.56	0.85	1.14	1.44	1.74	2.04	2.34	2.64	2.94
150	0.00	0.25	0.52	0.80	1.09	1.39	1.68	1.98	2.28	2.58	2.88
160	0.00	0.23	0.49	0.77	1.06	1.35	1.64	1.94	2.24	2.54	2.84
170	0.00	0.22	0.48	0.75	1.03	1.32	1.62	1.91	2.21	2.51	2.81
180	0.00	0.22	0.47	0.74	1.03	1.32	1.61	1.91	2.20	2.50	2.80

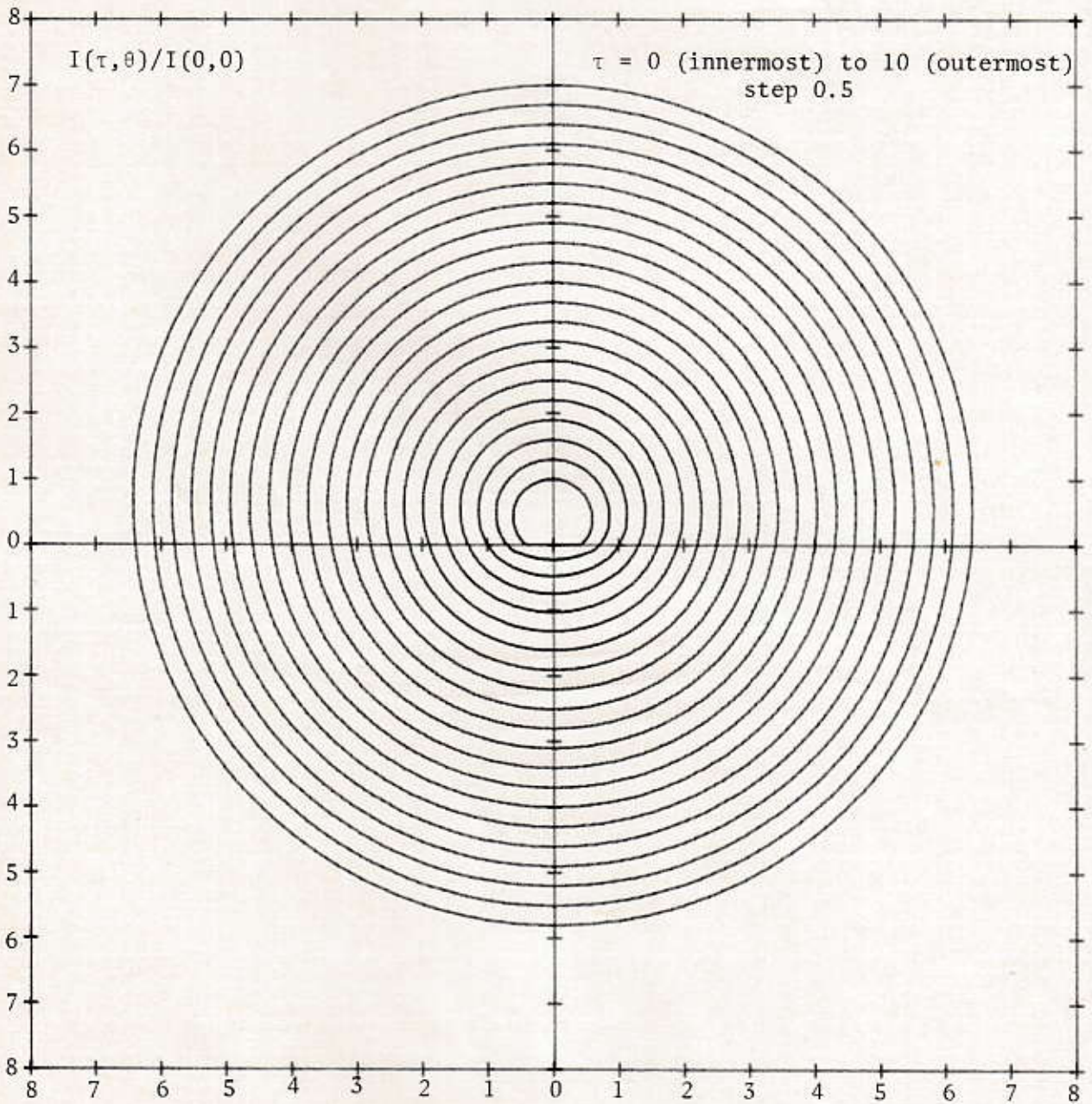


EDDINGTON I (TAU, THETA) / I (0, 0)  
ED.A1. VOL.30M (KOYAMA: 87.07.01)

[87/09/18]

THETA	TAU										
	0.0	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0	14.0	16.0	18.0	20.0
0	1.00	2.20	3.40	4.60	5.80	7.00	8.20	9.40	10.60	11.80	13.00
10	0.99	2.19	3.39	4.59	5.79	6.99	8.19	9.39	10.59	11.79	12.99
20	0.96	2.16	3.36	4.56	5.76	6.96	8.16	9.36	10.56	11.76	12.96
30	0.92	2.12	3.32	4.52	5.72	6.92	8.12	9.32	10.52	11.72	12.92
40	0.86	2.06	3.26	4.46	5.66	6.86	8.06	9.26	10.46	11.66	12.86
50	0.79	1.99	3.19	4.39	5.59	6.79	7.99	9.19	10.39	11.59	12.79
60	0.70	1.90	3.10	4.30	5.50	6.70	7.90	9.10	10.30	11.50	12.70
70	0.61	1.81	3.01	4.21	5.41	6.61	7.81	9.01	10.21	11.41	12.61
80	0.50	1.70	2.90	4.10	5.30	6.50	7.70	8.90	10.10	11.30	12.50
90	0.40	1.60	2.80	4.00	5.20	6.40	7.60	8.80	10.00	11.20	12.40
100	0.00	1.50	2.70	3.90	5.10	6.30	7.50	8.70	9.90	11.10	12.30
110	0.00	1.39	2.59	3.79	4.99	6.19	7.39	8.59	9.79	10.99	12.19
120	0.00	1.30	2.50	3.70	4.90	6.10	7.30	8.50	9.70	10.90	12.10
130	0.00	1.21	2.41	3.61	4.81	6.01	7.21	8.41	9.61	10.81	12.01
140	0.00	1.14	2.34	3.54	4.74	5.94	7.14	8.34	9.54	10.74	11.94
150	0.00	1.09	2.28	3.48	4.68	5.88	7.08	8.28	9.48	10.68	11.88
160	0.00	1.06	2.24	3.44	4.64	5.84	7.04	8.24	9.44	10.64	11.84
170	0.00	1.03	2.21	3.41	4.61	5.81	7.01	8.21	9.41	10.61	11.81
180	0.00	1.03	2.20	3.40	4.60	5.80	7.00	8.20	9.40	10.60	11.80





$I(\tau, \theta) / I(0, 0)$

$\tau \backslash \theta$	0.0	0.5	1.0	2.0	4.0	10.0	20.0
0	1.00	1.30	1.60	2.20	3.40	7.00	13.00
10	0.99	1.29	1.59	2.19	3.39	6.99	12.99
20	0.96	1.26	1.56	2.16	3.36	6.96	12.96
30	0.92	1.22	1.52	2.12	3.32	6.92	12.92
40	0.86	1.16	1.46	2.06	3.26	6.86	12.86
50	0.79	1.09	1.39	1.99	3.19	6.79	12.79
60	0.70	1.00	1.30	1.90	3.10	6.70	12.70
70	0.61	0.91	1.21	1.81	3.01	6.61	12.61
80	0.50	0.80	1.10	1.70	2.90	6.50	12.50
90	0.40	0.70	1.00	1.60	2.80	6.40	12.40
100	0.00	0.58	0.89	1.50	2.70	6.30	12.30
110	0.00	0.45	0.78	1.39	2.59	6.19	12.19
120	0.00	0.36	0.69	1.30	2.50	6.10	12.10
130	0.00	0.31	0.61	1.21	2.41	6.01	12.01
140	0.00	0.27	0.56	1.14	2.34	5.94	11.94
150	0.00	0.25	0.52	1.09	2.28	5.88	11.88
160	0.00	0.23	0.49	1.06	2.24	5.84	11.84
170	0.00	0.22	0.48	1.03	2.21	5.81	11.81
180	0.00	0.22	0.47	1.03	2.20	5.80	11.80

Calculated from the equations (16) and (17).



問題 ある恒星が、(24)式のエディントン近似の成立つ灰色大気を持っている。若しこの恒星が黒体のように輻射しているとすれば、その種々の光学的深さに起因する外向き強度( $\theta = 0$ )の割合を決定せよ。[A star has a grey atmosphere in which the Eddington approximation of eq.(24) is valid. Determine the fraction of the outward ( $\theta = 0$ ) intensity which originate at various optical depth in the star, if it radiates like a black body.]

この恒星から半径方向に外向きに出てくる強度は、(21),(24)式より

$$\begin{aligned} I(\theta = 0) &= \int_0^{\infty} B(T) \exp(-\tau) d\tau \\ &= (\sigma/\pi) \int_0^{\infty} T^4 \exp(-\tau) d\tau \\ &= (3\sigma/4\pi) T_{\text{eff}}^4 \int_0^{\infty} \{\tau + (2/3)\} \exp(-\tau) d\tau \\ &= (5\sigma/4\pi) T_{\text{eff}}^4 \end{aligned}$$

この内、深さ  $t$  より上部 ( $\tau < t$ ) で放出される部分は

$$\begin{aligned} I(\tau < t) &= (3\sigma/4\pi) T_{\text{eff}}^4 \int_0^t \{\tau + (2/3)\} \exp(-\tau) d\tau \\ &= (3\sigma/4\pi) T_{\text{eff}}^4 [(5/3) - \{t + (5/3)\} \exp(-t)] \end{aligned}$$

従って、任意の光学的深さ  $t$  より上部で放出される割合は

$$I(\tau < t)/I = 1 - (0.6t + 1) \exp(-t)$$

$t$  に対するこの比の値、および (24) 式による  $T$  が表に示される。放出される強度の内、70%は光学的深さ  $\tau = 2$  より浅い層に起因し、また  $\tau > 5$  の深部は僅か 3%しか寄与しないことがわかる。

No.

$\tau_0$	T	$I(\tau < \tau_0) / I$
0.0	4860	0.000
0.1	5033	0.041
0.2	5190	0.083
0.3	5334	0.126
0.4	5466	0.169
0.5	5590	0.212
0.6	5706	0.254
0.7	5816	0.295
0.8	5919	0.335
0.9	6018	0.374
1.0	6112	0.411
1.2	6287	0.482
1.4	6449	0.549
1.6	6600	0.604
1.8	6741	0.656
2.0	6874	0.702
3.0	7443	0.861
4.0	7906	0.938
5.0	8299	0.973
10.0	9720	1.000



### § 5. 太陽の周辺減光

適当な露出で撮影された太陽diskの写真は、円像disk中心から周辺limbに向かって周辺減光 limb-darkening を示している。

§ 4 (16) 式で得られた輻射強度

$$I(\tau, \theta) = (F/4)(2 + 3\tau + 3 \cos \theta)$$

の方向性は、太陽では直接に周辺減光の観測と比較して、その理論の近似の良否を判断できる。大気表面から放出される輻射は、 $\tau = 0$  であり、図で我々が法線に対して角 $\theta$ をなす方向の光を見ている disk 上の点P (disk中心からの距離 =  $r \cdot \sin \theta$ ) の強度は  $I(0, \theta)$  であるが、ここではそれを簡単に  $I(\theta)$  と書くことにしよう。今の近似では、上式で  $\tau = 0$  とし

$$I(\theta) = (F/4)(2 + 3 \cos \theta) \quad (1)$$

disk中心Cからの輻射は  $\theta = 0$  だから

$$I(0) = 5F/4 \quad (2)$$

従って、太陽disk上の明るさを、中心の明るさを単位にして表せば

$$I(\theta)/I(0) = (2/5) + (3/5) \cos \theta \quad (3)$$

一方、観測では太陽diskの明るさを実験式

$$I(\theta)/I(0) = (1 - u_1) + u_1 \cos \theta \quad (4)$$

で表し、 $u_1$  を周辺減光係数coefficient と言う。今の近似の理論値は (3)式から、 $u_1 = 3/5 = 0.6$  ということになる。全輻射に対する観測値は表に見られるように 0.54 である。荒いエディントン第一近似にしてはかなりの精度だとも言えよう。

cos $\theta$	1.0	0.8	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02
sin $\theta$	0.000	0.600	0.800	0.866	0.916	0.954	0.980	0.995	0.999	0.9998
$\theta$	0°	36.9°	53.1°	60.0°	66.4°	72.5°	78.5°	84.3°	87.1°	88.9°
(3)	1.000	0.880	0.760	0.700	0.640	0.580	0.520	0.460	0.430	0.412
obs.	1.000	0.898	0.787	0.731	0.669	0.602	0.525	0.448	0.390	0.320

次ページの表には全輻射の観測値だけでなく、種々な単色輻射に対する周辺減光の観測値が示されている。これによると短波長の(青い)光ほど周辺減光が著しいことが判かる。

もっと精度の高い観測では (4)式の代わりに

$$I(\theta)/I(0) = 1 - u_2 - v_2 + u_2 \cos \theta + v_2 \cos^2 \theta \quad (5)$$

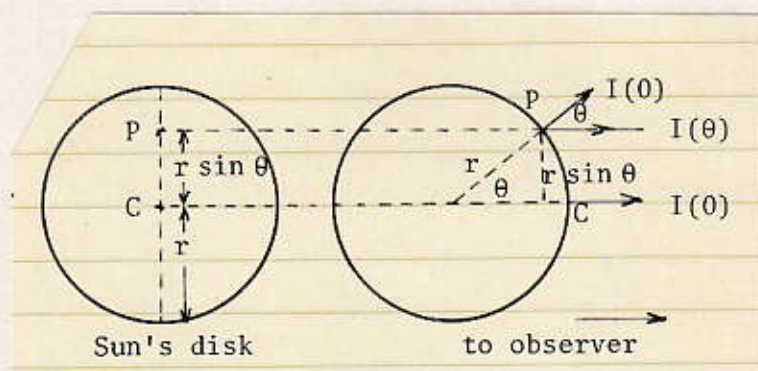
或いは

$$I(\theta)/I(0) = A + B \cos \theta + C \{1 - \cos \theta \ln(1 + \sec \theta)\} \quad (6)$$

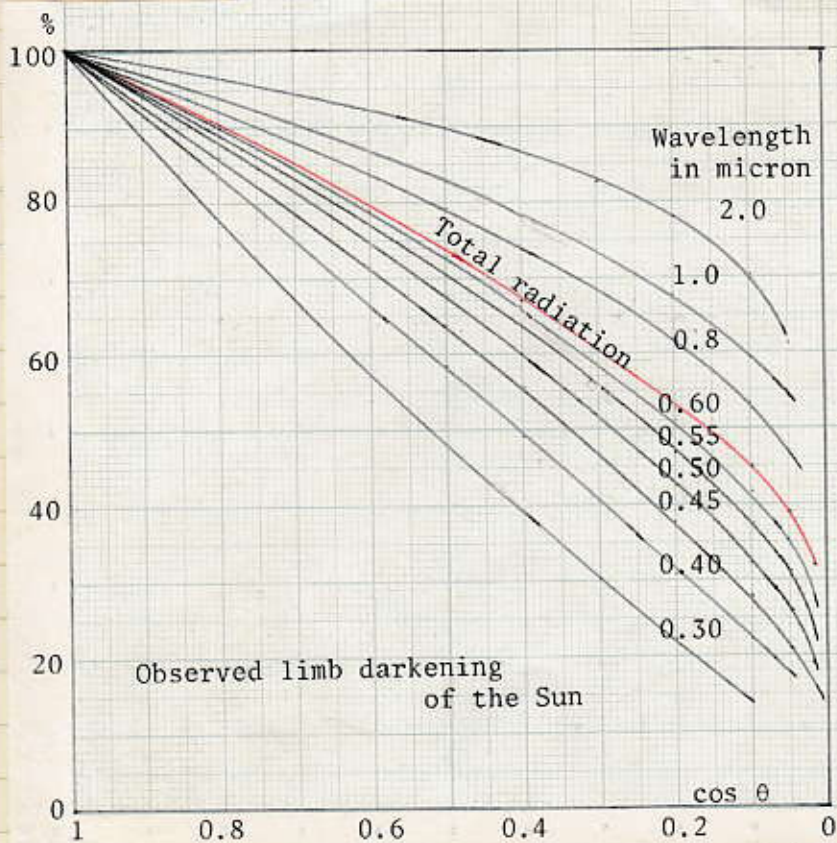
但し

$$A + B + (1 - \ln 2)C = 1$$

が使われるが、この章での理論の近似にはこれほどの精度はない。種々の波長で観測的に求められた、これらの周辺減光係数が表に示されている。







$I_{\lambda}(\theta)/I_{\lambda}(0)$  [1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

$\lambda$	$\cos \theta$	1.0	0.8	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02
	$\sin \theta$	0.000	0.600	0.800	0.866	0.916	0.954	0.980	0.995	0.9987	0.9998
$\mu$											
0.20 [8]	1.00	0.85	0.74	0.69	0.65	0.61	0.58				
0.22 "	1.00	0.58	0.33	0.26	0.21	0.16	0.12				
0.245 "	1.00	0.71	0.49	0.42	0.36	0.31	0.25				
0.265 "	1.00	0.68	0.42	0.32	0.24	0.19	0.14				
0.28 "	1.00	0.72	0.47	0.38	0.29	0.22	0.16				
0.30 "	1.00	0.77	0.57	0.48	0.39	0.30	0.22	0.14			
0.32 "	1.00	0.809	0.623	0.532	0.438	0.347	0.262	0.17			
0.35 "	1.00	0.837	0.665	0.579	0.487	0.397	0.306	0.21			
0.37 "	1.00	0.851	0.687	0.603	0.513	0.421	0.332	0.23	0.19		
0.38 "	1.00	0.83	0.66	0.58	0.48	0.39	0.30	0.22	0.18		
0.40 "	1.00	0.835	0.663	0.585	0.490	0.403	0.308	0.222	0.18		
0.45 "	1.00	0.860	0.714	0.637	0.556	0.468	0.378	0.278	0.21	0.14	
0.50 "	1.00	0.877	0.744	0.675	0.599	0.513	0.425	0.323	0.26	0.19	
0.55 "	1.00	0.890	0.769	0.703	0.633	0.556	0.468	0.371	0.31	0.24	
0.60 "	1.00	0.900	0.788	0.727	0.664	0.587	0.508	0.412	0.35	0.28	
0.80 "	1.00	0.924	0.843	0.793	0.744	0.681	0.615	0.533	0.47		
1.0 [10]	1.00	0.941	0.870	0.828	0.783	0.731	0.675	0.59	0.54		
1.5 "	1.00	0.957	0.902	0.873	0.831	0.789	0.735	0.65	0.58		
2.0 "	1.00	0.968	0.922	0.896	0.865	0.826	0.780	0.70	0.61		
3.0 "	1.00	0.976	0.944	0.922	0.902	0.873	0.835	0.78	0.67		
5.0 "	1.00	0.986	0.963	0.949	0.937	0.916	0.890	0.84	0.76		
10 "	1.00	0.992	0.981	0.973	0.964	0.950	0.937	0.90	0.87		
20 "	1.00	0.994	0.983	0.975	0.970	0.964	0.957	0.95	0.93		
Total radiation	1.00	0.898	0.787	0.731	0.669	0.602	0.525	0.448	0.39	0.32	

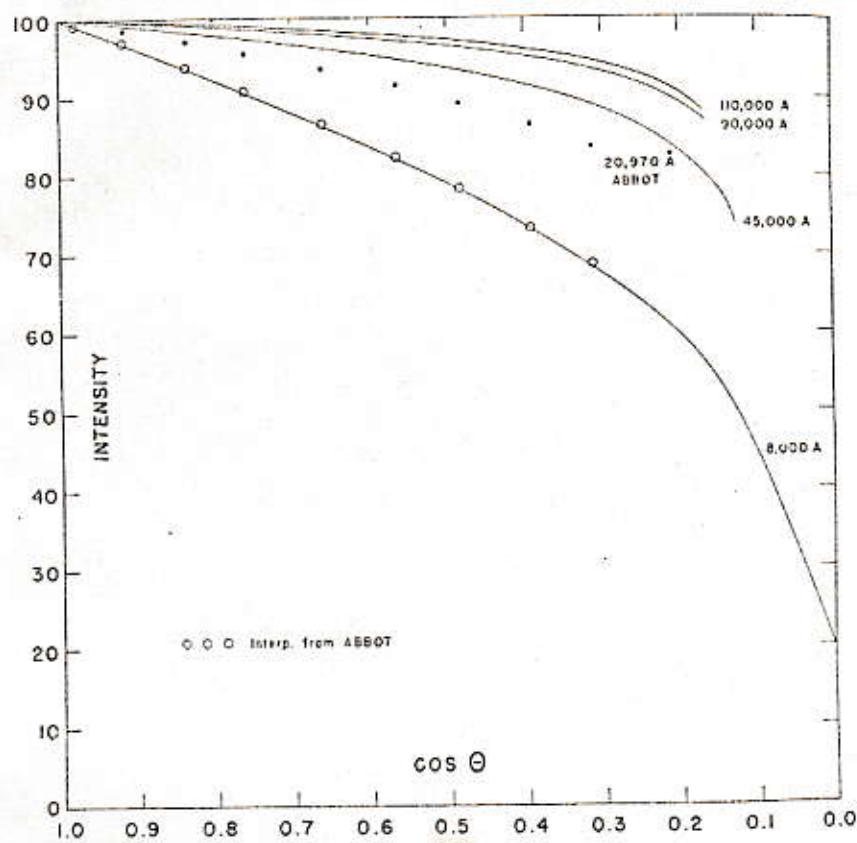


FIG. 3(a).—SOLAR LIMB DARKENING

The intensity distribution across the solar disk is shown for several wave lengths in the infrared. The angle  $\theta$  is defined with the aid of Fig. 2 of Chapter 5. Notice the decrease of limb darkening with increasing wave length. Measures by C. G. Abbot are shown for comparison. (McMath-Hulbert Observatory, University of Michigan.)

Aller, L. H. Astrophysics I (1sted.), p. 162.



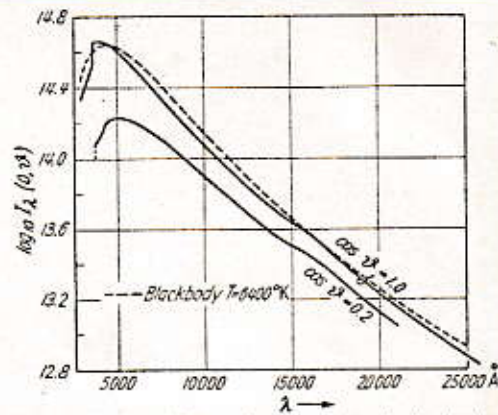


Fig. 7. Intensity of the continuum spectrum for the Sun's center and  $\cos \theta = 0.2$ .

Handbuch der Physik, Band LII, S.16 (L. Goldberg & A. K. Pierce)

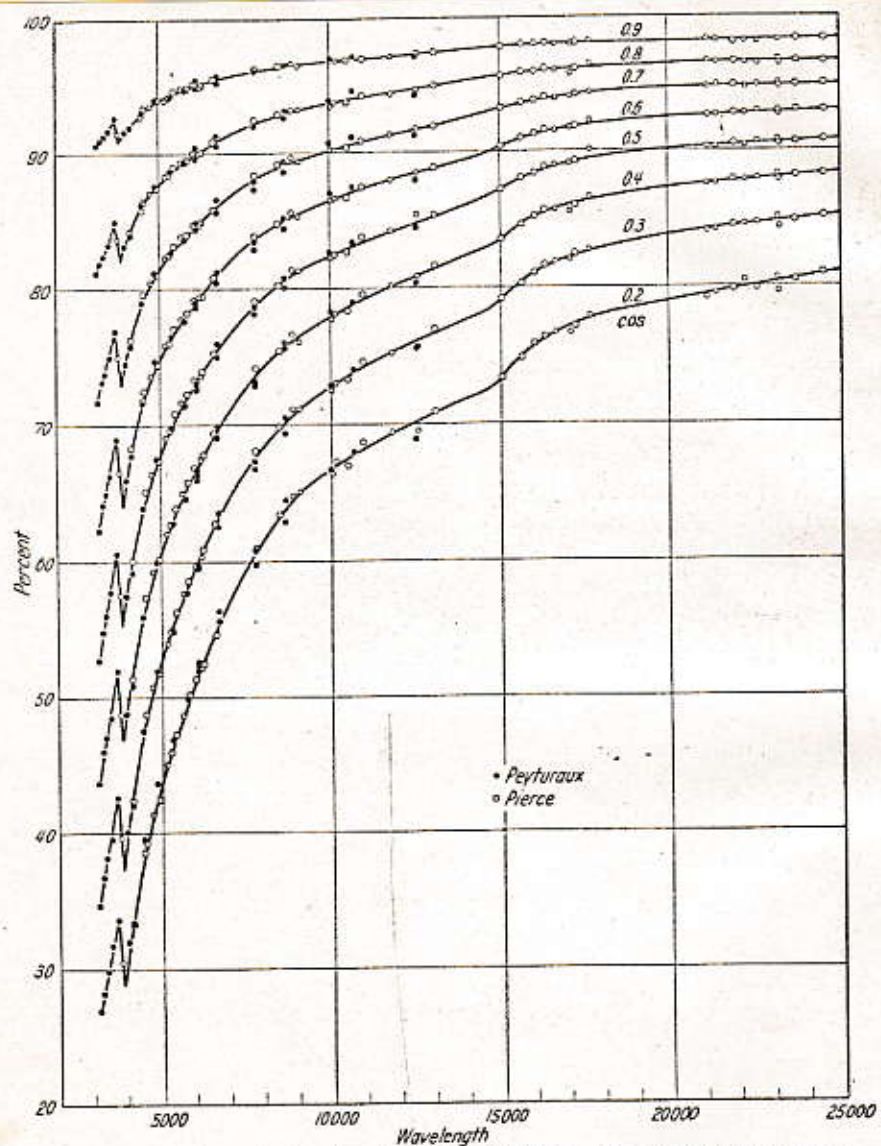


Fig. 1. Limb darkening as a function of wavelength for selected points of the solar disk defined by  $\cos \theta$ .



The limb darkening constants

$\lambda$	$u_2$	$v_2$	$A$	$B$	$C$	$u_1$	$\beta = \frac{u_1}{1-u_1}$	$\frac{F_\lambda}{I_\lambda(0)}$	$\frac{I'_\lambda(90^\circ)}{I'_\lambda(0)}$
$\mu$									
0.20	+0.12	+0.33	-0.2	0.9	+0.9	0.62	1.6	0.79	0.54
0.22	-1.3	+1.6	-3.4	2.9	+5	1.48	—	0.51	0.06
0.245	-0.1	+0.85	-1.9	2.0	+3	1.16	—	0.61	0.20
0.265	-0.1	+0.90	-1.9	2.1	+2.7	1.36	—	0.540	0.08
0.28	+0.38	+0.57	-1.3	1.8	+1.8	1.24	—	0.588	0.10
0.30	+0.74	+0.20	-0.4	1.2	+0.5	1.04	—	0.648	0.06
0.32	+0.88	+0.03	-0.02	0.97	+0.1	0.93	13	0.685	0.08
0.35	+0.98	-0.10	+0.25	0.79	-0.3	0.84	5.3	0.705	0.11
0.37	+1.03	-0.16	+0.42	0.68	-0.4	0.79	3.8	0.71	0.13
0.38	+0.92	-0.05	+0.26	0.78	-0.2	0.84	5.3	0.71	0.13
0.40	+0.91	-0.05	+0.20	0.81	-0.1	0.83	5.0	0.718	0.13
0.45	+0.99	-0.17	+0.54	0.00	-0.44	0.73	2.7	0.755	0.11
0.50	+0.97	-0.22	+0.68	0.49	-0.56	0.65	1.9	0.782	0.16
0.55	+0.93	-0.23	+0.74	0.43	-0.56	0.59	1.44	0.803	0.20
0.60	+0.88	-0.23	+0.78	0.39	-0.57	0.55	1.22	0.817	0.24
0.80	+0.73	-0.22	+0.92	0.25	-0.56	0.41	0.70	0.862	0.39
1.0	+0.64	-0.20	+0.97	0.18	-0.53	0.34	0.52	0.886	0.48
1.5	+0.57	-0.21	+1.11	0.08	-0.61	0.25	0.33	0.916	0.56
2.0	+0.48	-0.18	+1.09	0.07	-0.49	0.21	0.27	0.932	0.60
3.0	+0.35	-0.12	+1.04	0.06	-0.34	0.17	0.20	0.948	0.72
5.0	+0.22	-0.07	+1.02	0.05	-0.18	0.11	0.12	0.964	0.81
10.0	+0.15	-0.07	+1.04	0.00	-0.22	0.05	0.05	0.982	0.87
Total	+0.84	-0.20	+0.72	+0.42	-0.45	0.54	1.16	0.82	0.32



### ★周辺減光の物理学的意味

(1)式と § 4(15)式とを比べて見ると

$$I(\theta) = (F/4)(2 + 3 \cos \theta)$$

$$B(\tau) = (F/4)(2 + 3 \tau)$$

すなわち、今の理論大気では、種々の $\theta$ に対応する太陽disk上の点Pで観測される表面強度 $I(\theta)$ は、その $\theta$ に応じて異なる光学的深さ $\tau = \cos \theta$ でのプランク強度に等しい、すなわち

$$I(\theta) = B \{T(\tau = \cos \theta)\}$$

であり、このことは disk 中心 ( $\theta = 0$ ) から limb ( $\theta = 90^\circ$ )へと見て行くにつれて、 $\tau = 1$  から  $\tau = 0$  へと、次第に浅い層のプランク強度を見ていることに相当する。今の理論大気では、§ 4(24)式の温度分布 $T(\tau)$ に従って、浅くなるにつれて次第に低温になり、プランク強度は弱くなり、暗くなる。

また、『 $\theta$ に対応する点では、光学的深さ  $\tau = \cos \theta$  の所のプランク強度』と言うことは、『各点どこでも視線方向に測った光学的距離  $\tau \sec \theta = 1$  の所のプランク強度』を見ていることに相当する。

これらのことから、大気の温度傾斜  $dT(\tau)/d\tau$  が大きいほど周辺減光は著しく、理論的に求めた温度分布 $T(\tau)$ の良否のチェックとなる。逆に周辺減光の観測から太陽表面の温度分布が得られる。

大気中の温度分布 $T(\tau)$ は熱平衡の種類によって変わってくる。すなわち大気中の熱の移動が輻射によるか、対流によるかによって異なる。従って周辺減光の観測は輻射平衡理論が正しいか否かの criterion になる (Milne)。

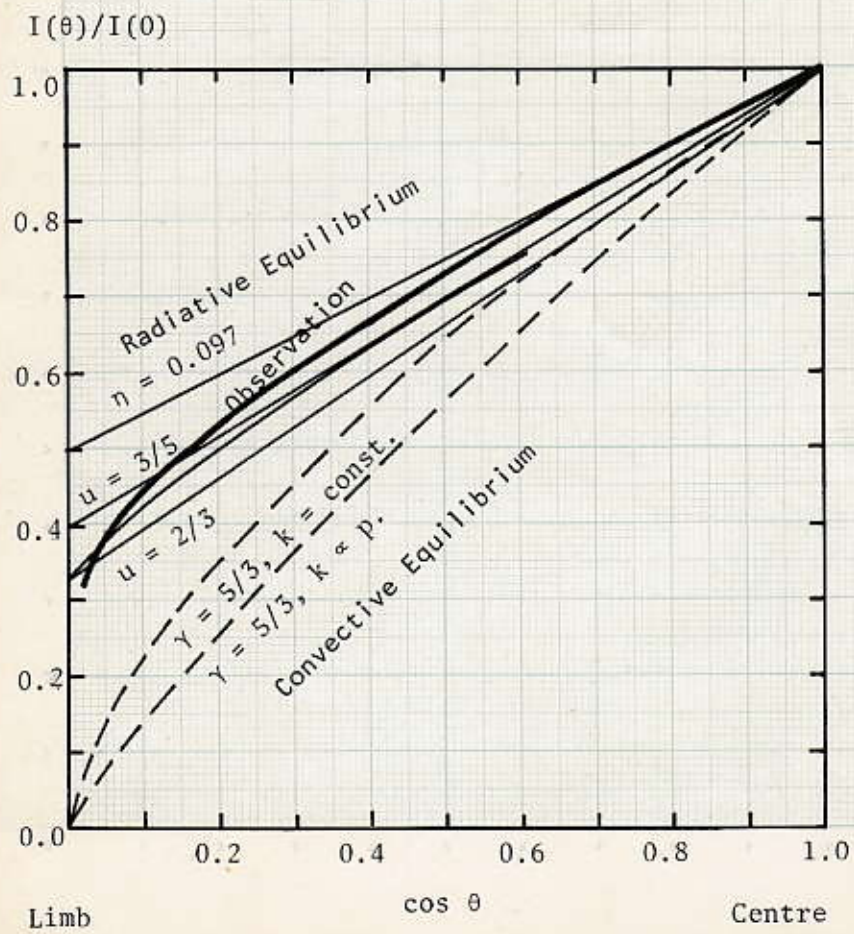
次の図は周辺減光の観測と理論とを比較するものである。太線は観測値で、ごく周辺近くは地球大気の scintillation や、散乱光のため測定が困難である。

細い実線は輻射平衡理論の結果である。(  $u = 3/5$  ) はエディントンの近似解、(  $u = 2/3$  ) はシュバルツシルトの第1、第2近似解、(  $\eta = 0.097$  ) は太陽大気で生ずる吸収線のため、光球が暖められる温室効果を考慮したものである。

破線は対流平衡の結果で、 $\gamma = c_p/c_v = 5/3$  (monatomic gas) について、 $k = \text{const}$  (太陽などの場合) と、 $k = \text{const} \cdot p$  (A型星などの場合) とした値が示されている。対流平衡の特徴は、limb で  $I = 0$  となって、limb が真暗になることである。このことから、対流平衡より輻射平衡が幾分有利であることが判かるが、輻射平衡も完全とは言えない。

太陽表面の粒状斑が示すように表面近くには対流が存在しており、輻射理論はそれだけ修正されねばならない。またレッドマン Redman (M.N. 103, 173, 1943) が指摘したように、光球表面に凹凸が実在し、もし理想的に limb が観測できたとしても、それが  $\cos \theta = 0$  の強度と対応していないかも知れない。これが事実だとすれば、周辺減光の観測もある程度以上に進めることは無意味となる。





## Methods of solution

ここでは、Transfer equation の解法について、有名な3つの方法を概説し、その中、discrete stream の方法、principles of invariance, moments の方法である。一定の net flux  $\omega_0 = 1$  である等方散乱大気 (conservative scattering) を通る流線の問題を考える。特に、輻射場での scattering 係りに関係があるのは  $\bar{\omega}_0$  は flux が一定に等しいので 1 に等しくなければならない。この場合には Transfer equation は (5.2.8) 式。

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - J(\tau) \quad (1)$$

この式で、 $J(\tau)$  の方向の函数  $J(\tau, \mu)$  は  $J(\tau)$  と書かれる。これは、等方散乱の仮定の結果である。上式の左辺で、 $\mu$  を用いて  $d\tau$ 、 $J(\tau)$  に対して積分を、 $\mu$  で表わせば次の式。

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I d\mu \quad (2)$$

この式は、問題は、微積分方程式、integro-differential equation の解になる。

discrete stream の方法の idea は、最初 Schuster and Schwarzschild によるもので、輻射場を、 $I_+$  と  $I_-$  の強度を持つ内側向きと、外側向きの stream に分解される。この idea は、上の二つの方程式を次の二つの方程式に分解される。

$$+\frac{1}{2} \frac{dI_+}{d\tau} = I_+ - \frac{1}{2}(I_+ + I_-) \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dI_-}{d\tau} = I_- - \frac{1}{2}(I_+ + I_-) \quad (4)$$

左辺の  $\mu$  は、平均値と等しい。これらの式の解は簡単であり、大気の上層で内側向きの輻射はない。  $\tau=0$  で  $I_- = 0$  という条件で求めることができる。(3)、(4) 式で表わされるこの方法は、粗いものがあるが、Chandrasekhar により行われるように、発展性、有力な技法として向上している。



(2)式の積分を表わすのに Gauss の数値積分の公式を用いる。今  $2n$  次の Legendre 多項式  $P_{2n}(\mu) = 0$  の根を

$$\mu_{-n}, \mu_{-n+1}, \dots, \mu_{-1}, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$$

とする。但し Legendre の性質より  $\mu_{-i} = -\mu_i$

この根の値を用いる。

$$\int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu) d\mu \approx \sum_{j=-n}^n a_j I(\tau, \mu_j) \quad (5)$$

と高次近似をする。ここで  $a_j$  は Gaussian weight の定数係数である。且つ  $\mu_j$  は

$$a_j = a_{-j} \quad \text{又} \quad \mu_j = -\mu_{-j} \quad (6)$$

の性質があり Gauss の積分表に於てある。積分区間を  $2n+1$  に分割するこの Gauss の数値積分は  $(4n-1)$  次までの多項式と正確に表わして置く。後に必要多次の関係式も容易に出される。

$$\sum_{j=1}^n a_j \mu_j^m = \int_0^1 \mu^m d\mu = \frac{1}{m+1} \quad (7)$$

一般の函数の場合には  $n$  の次数を高めればよい近似を得られる。

さて transfer equation の問題に於て、第  $n$  次の近似とすると (2) 式は  $2n+1$  の連立線形常微分方程式になる。

$$\mu_i \frac{dI_i}{d\tau} = I_i - \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^{+n} a_j I_j \quad (i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n) \quad (8)$$

但し  $I_i \equiv I(\tau, \mu_i)$ 。

従って数学的解法にはこの particular solution を先ず求める。それは

$$I_i = g_i e^{-k\tau} \quad (i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n) \quad (9)$$

と仮定。定数係数  $g_i, k$  を求める。(9)を(8)に代入すると

$$g_i (1 + \mu_i k) = \frac{1}{2} \sum a_j g_j = \text{const.} \quad (10)$$

$$\therefore g_i = \frac{\text{const.}}{1 + \mu_i k} \quad (i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n) \quad (11)$$

$\therefore \text{const. } c_j$  の係数  $c_j$  は  $i$  に依存する  $n$  個の定数  $c_j$  の意味である。(11) を (10) に代入すると

$$1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{1 + \mu_j k} \quad (12)$$

この  $i$  を満たす  $k$  は  $i$  個の定数  $c_j$  の微分方程式を満足する  $k$  である。  $\text{ch. } \mu_j = -\mu_j$

$a_j = a_j$  である。  $i$  を満たす  $k$  は  $i$  個の定数  $c_j$  の characteristic equation である。

$$1 = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{1 - \mu_j^2 k^2} \quad (13)$$

これは  $k^2$  についての  $n$  次代数方程式である。その根が particular solution になる。すなわち (7) は

$$\sum_{j=1}^n a_j = 1. \quad (14)$$

従って  $k^2 = 0$  は明らかにこの方程式の根になる。従ってこの方程式の根は  $k = 0$  の重根とその他は

$$\pm k_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-1) \quad (15)$$

と pair に存在する。従って  $0$  以外の  $(2n-2)$  の単根に対しては (8) 式の particular solution (9) を出さず。唯、重根  $0$  は特別に考えなければならない。

このため

$$I_i = h(\tau + g_i) \quad (i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n) \quad (16)$$

と仮定し  $h$  と  $g_i$  を適当に定数とす。 (重根の場合には  $h(\tau + g_i) e^{-k\tau}$  の形を仮定するが普通  $k=0$  である。  $i$  を (8) に代入し

$$b \mu_i = h(\tau + g_i) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j h(\tau + g_j)$$

(6), (14) は

$$\mu_i = g_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j g_j \quad (17)$$

従って  $g_i = \mu_i + Q \quad (i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n), \quad (18)$

$\therefore Q$  は  $i$  に independent な constant. この  $Q$  を (17) に代入して検算する。即ち

$$\mu_i + Q - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j \mu_j - \frac{1}{2} Q \sum_{j=1}^n a_j = \mu_i$$

$\circ$  Sym & Antisym.



従って、重複  $k=0$  に対する particular solution は

$$I_i = b(\tau + Q + \mu_i) \quad (i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n) \quad (19)$$

以上で、 $2n$  個の particular solution を得た。一般 solution は、それら  
a linear combination である。

$$I_i = b \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n-1} \left[ \frac{h_\alpha e^{-k_\alpha \tau}}{1 + \mu_i k_\alpha} + \frac{h_{-\alpha} e^{k_\alpha \tau}}{1 - \mu_i k_\alpha} \right] + \mu_i + Q + \tau \right\} \quad (20)$$

$$(i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n)$$

ここで、 $h_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$ )、 $Q$  は  $2n$  個の積分常数である。これは境界  
条件によって決まる。まず、 $\tau \rightarrow \infty$  で  $I_i$  が指数的に増大しないように  
はあり得ない。従って、(20)式右辺の第2項は0でなければならない。従って、 $h_{-\alpha} = 0$ ,

$$I_i = b \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{h_\alpha e^{-k_\alpha \tau}}{1 + \mu_i k_\alpha} + \mu_i + Q + \tau \right\} \quad (i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n) \quad (21)$$

又、星の外部への流入と放射は平衡である。この条件は

$$I_{-i} = 0 \quad \text{at } \tau = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (22)$$

これを(21)の条件に(21)を代入すると

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{h_\alpha}{1 + \mu_i k_\alpha} + Q = \mu_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (23)$$



この条件式の数は  $n$  個である。従って、 $n$  個の常数  $h_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$ )、 $Q$   
が全部決定する。 $Q$  は flux を表す常数である。これを  $F$  と表す。

まず、定義により、flux  $F$  は次のように表す。

$$F = 2 \int_{-1}^{+1} I \mu d\mu \quad (24)$$

この積分は Gauss の公式で表すことができる。この  $I$  に (21) を代入する。積分の代りに  
weight  $Q_i$  を掛ける。すると

$$F = 2b \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n-1} h_\alpha e^{-k_\alpha \tau} \sum_i \frac{Q_i \mu_i}{1 + \mu_i k_\alpha} + \sum_i Q_i \mu_i^2 + (Q + \tau) \sum_i Q_i \mu_i \right\} \quad (25)$$

従って、(7)式に代入する。右辺第2項の  $\sum_i$  は

$$\sum_i a_i \mu_i^2 = \frac{2}{3}, \quad \sum_i a_i \mu_i = 0 \quad (26)$$

とす。又、右辺第1項の $\sum$ は次の形に変形する。

$$\sum_i \frac{a_i \mu_i}{1 + \mu_i k_\alpha} = \frac{1}{k_\alpha} \sum_i a_i \left(1 - \frac{1}{1 + \mu_i k_\alpha}\right) = \frac{1}{k_\alpha} \left(2 - \sum_i \frac{a_i}{1 + \mu_i k_\alpha}\right) \quad (27)$$

又、これに(12)に於て(20)とある値を代入。従って(25)式は

$$F = \frac{4}{3} l = \text{const.} \quad (28)$$

とす。又、(21)式は

$$I_i = \frac{3}{4} F \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{k_\alpha e^{-k_\alpha \tau}}{1 + \mu_i k_\alpha} + \tau + \mu_i + \theta \right\} \quad (i = \pm 1, \dots, \pm n) \quad (29)$$

とす。mean intensity (source function) の表示は積分式により

$$\begin{aligned} J(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I d\mu = \frac{1}{2} \sum_i a_i I_i \\ &= \frac{1}{2} l \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n-1} k_\alpha e^{-k_\alpha \tau} \sum_i \frac{a_i}{1 + \mu_i k_\alpha} + \sum_i a_i \mu_i + (\theta + \tau) \sum_i a_i \right\} \quad (30) \end{aligned}$$

これに(7),(12),(26),(28)を用いると

$$J(\tau) = \frac{3}{4} F \left( \tau + \theta + \sum_{\alpha=1}^{n-1} k_\alpha e^{-k_\alpha \tau} \right) \quad (31)$$

とす。これに(30)の求めた $J(\tau)$ の形

$$J(\tau) = \frac{3}{4} F [\tau + g(\tau)] \quad (32)$$

を比較して

$$g(\tau) = \theta + \sum_{\alpha=1}^{n-1} k_\alpha e^{-k_\alpha \tau} \quad (33)$$

である。 $g(\tau)$ は slowly varying function で複雑であるが Chandrasekhar の方法では、次数を高ければいくつでも精しく求められる。law of limb-darkening (emergent intensity) は

$$\begin{aligned} I(0, +\mu) &= \int_0^\infty J e^{-\tau/\mu} \frac{1}{\mu} d\tau \\ &= \frac{3}{4} F \left( \mu + \theta + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{k_\alpha}{1 + k_\alpha \mu} \right) \quad (34) \end{aligned}$$



最も簡単な場合の例 e.2.

(i)  $n=1$  の場合.

$$a_1 = a_{-1} = 1, \quad \mu_1 = -\mu_{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (35)$$

$$(13) \rightarrow k_\alpha = 0. \quad (\text{重根の} \mu).$$

$$(23) \rightarrow Q = \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{重根の} \mu^2, \quad L_\alpha \text{ は現れず}). \quad (36)$$

$$g(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (37)$$

limb darkening は.

$$(34) \rightarrow I(0, \mu) = \frac{3}{4} F\left(\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (38)$$

transfer equation は.

$$(8) \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dI_1}{d\tau} &= I_1 - \frac{1}{2}(I_1 + I_{-1}) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dI_{-1}}{d\tau} &= I_{-1} - \frac{1}{2}(I_1 + I_{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

これは、1 次元の流体力学 Schuster-Schwarzschild の形 (3), (4) とよく似ており、  
 $k_\alpha$  の係数も異なっていないのである。

(ii)  $n=2$  の場合.

$$a_1 = a_{-1} = 0.652145, \quad \mu_1 = -\mu_{-1} = 0.339981 \quad (40)$$

$$a_2 = a_{-2} = 0.347855, \quad \mu_2 = -\mu_{-2} = 0.861136$$

$$(13) \rightarrow \mu_1^2 \mu_2^2 k^2 = a_1 \mu_1^2 + a_2 \mu_2^2 = \frac{1}{3} \quad (41)$$

$$\therefore k_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\mu_1 \mu_2} = 1.972027 \quad (42)$$

$$(23) \rightarrow Q = 0.694025, \quad L_1 = -0.116675 \quad (\text{境界条件を代入}). \quad (43)$$

$$g(\tau) = 0.694025 - 0.116675 e^{-1.972027\tau} \quad (44)$$

$$(34) \rightarrow I(0, \mu) = \frac{3}{4} F\left(\mu + 0.694025 - \frac{0.116675}{1 + 1.972027\mu}\right) \quad (45)$$

Chandrasekhar はこの他に  $n=3$  についても扱っているが、ここでは一般  
 的に Eddington の近似で十分である。数学的の参考は、(Kopf: Mathematical problems of Radiative Equilibrium (Cambridge Univ.) 参照。

### § The principles of invariance.

これは Ambartsumyan に依るため、Chandrasekhar はそれを非常に発展させた。最初の不変原理は、次の様に述べられる。半無限大の平面平行大気からの放射輻射は、その大気に、任意の光学的厚さの層を付加しても、取去っても不変である。ここで吾々は、散乱函数 scattering function を導入する。それ自体に垂直な単位面積あたりの net flux ( $\pi F$ ) の輻射の平行光線が平面平行大気に入射したとき、その場合、

$$I(0, \mu) = \frac{F}{4\mu} S(\mu, \mu_0) \quad (1)$$

に於て、diffusely reflected intensity を使わず scattering function  $S(\mu, \mu_0)$  を定義する。ここで  $\mu_0$  は incident beam に対する、又は、axial symmetry の場合を考える。右の図は、constant net flux の同

題に、limb darkening に関連した principles of invariance を説明する。上に述べた原理から、

若し top layer を完全に深さ  $\tau$  まで取り去ると、 $I(\tau, \mu)$

は、 $I(0, \mu)$  に等しくなる。従って、 $I(0, \mu)$

と  $I(\tau, \mu)$  との差は、 $I(\tau, -\mu)$  輻射によるものである。

を示す top layer の下に起こる放射。その輻射は、top layer を深さ  $\tau$  まで取り去ると、 $I(\tau, \mu)$  と  $I(0, \mu)$  の大小に依る。これは明らかであり、その増大は、top layer からの  $I(\tau, -\mu)$  輻射による。それは、 $\tau$  以下の大気に入射し、うまく反射される。scattering function を用いて、これは

$$I(\tau, \mu) = I(0, \mu) + \frac{1}{2\mu} \int_0^{\mu_0} S(\mu, \mu') I(\tau, -\mu') d\mu' \quad (2)$$

継続するものに、この式を  $\tau$  で微分し、 $\tau=0$  とおくと、即ち、

$$\left[ \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} \right]_{\tau=0} = \frac{1}{2\mu} \int_0^{\mu_0} S(\mu, \mu') \left[ \frac{dI(\tau, -\mu')}{d\tau} \right]_{\tau=0} d\mu' \quad (3)$$

必要な微係数は、transfer equation から得られる。即ち、

$$\left[ \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} \right]_{\tau=0} = \frac{1}{\mu} [I(0, \mu) - J(0)] \quad (4)$$

$$\left[ \frac{dI(\tau, -\mu')}{d\tau} \right]_{\tau=0} = \frac{1}{\mu'} J(0) \quad (5)$$



$I(0, -\mu) = 0$  の条件を思い出す。この微係数を(3)式に代入すれば、次式を得る。

$$I(0, +\mu) = J(0) \left[ 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 S(\mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \right] \quad (6)$$

若し diffuse reflection の法則も既に同じやり方を1とすれば、

$$\left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0} \right) S(\mu, \mu_0) = \tilde{\omega}_0 H(\mu) H(\mu_0) \quad (7)$$

を得る。こゝで

$$H(\mu) = 1 + \frac{1}{2} \tilde{\omega}_0 \mu H(\mu) \int_0^1 \frac{H(\mu') d\mu'}{\mu + \mu'} \quad (8)$$

scattering function に代入すれば、

$$I(0, +\mu) = J(0) \left[ 1 + \frac{1}{2} \mu H(\mu) \int_0^1 \frac{H(\mu') d\mu'}{\mu + \mu'} \right] \quad (9)$$

または簡単に

$$I(0, +\mu) = J(0) H(\mu) \quad (10)$$

を得る。こゝで、 $H(\mu)$  は  $\tilde{\omega}_0 = 1$  即ち (8) 式で定義された函数と意味は同じ。μを用いて

$J(0)$  を  $\mu$  flux  $\pi F$  の定数と書ぶ。  $I(0, +\mu)$  は (10) 式に代入すれば

$$\frac{4}{\pi} \frac{J(0)}{F} = \frac{\int_0^1 H(\mu) d\mu}{\int_0^1 H(\mu) \mu d\mu} = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \quad (11)$$

を得る。  $H$  函数の moments は判らぬが、

$$J(0) = \frac{3^{1/2}}{4} F \quad (12)$$

を見出す。この最後の式は Kapf-Bronstein relation と呼ばれる。 constant net flux problem における放射強度の最後の結果は、

$$I(0, \mu) = \frac{3^{1/2}}{4} F H(\mu) \quad (13)$$

である。

### § The solar photosphere.

太陽光球の研究の目的は、温度、圧力、密度のようき種々の物理性質が、大気中の深さとともにどのように変るかということを探る。これらの性質を放射輻射場の予想に利用することである。

### The T - $\tau$ relation.

最初、包含される一般原理を説明するようき種々の研究と論ずるが、数値的の精度に関しては、歴史的なものである。transfer equation が

$$-\mu \frac{dI_{\nu}(z, \mu)}{dz} = \kappa_{\nu} I_{\nu}(z, \mu) - \kappa_{\nu} B_{\nu}(T_z) \quad (1)$$

である。L. E. (ある大気を考へる)。このようき大気では、問題は比較的単純である。何故なら、右の函数として  $T$  の決定は、解を完全に、即ち (1) 式によって決定されるからである。吾々は光球の輻射平衡に考へる。これは、energy の輸送は、輻射以外の機構がなく、 $\kappa$  energy a source or sink が無いことを意味する。若し、太陽の半径に比較して十分に厚い層をとれば？

$$\pi F = \pi \int_0^{\infty} F_{\nu}(z) d\nu = \text{const.} \quad (2)$$

である。(1) を  $\mu$  について積分すれば？

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dz} \int_{-1}^{+1} \mu I_{\nu}(z, \mu) d\mu \\ = \kappa_{\nu} \int_{-1}^{+1} I_{\nu}(z, \mu) d\mu - \kappa_{\nu} B_{\nu}(T_z) \int_{-1}^{+1} d\mu \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。基礎的な定義を用いる。この式は、次のようにする。

$$-\frac{dF_{\nu}}{4\pi dz} = \kappa_{\nu} J_{\nu} - \kappa_{\nu} B_{\nu} \quad (4)$$

振動数  $\nu$  について積分すれば？

$$-\frac{dF}{4\pi dz} = \int_0^{\infty} (J_{\nu} - B_{\nu}) \kappa_{\nu} d\nu \quad (5)$$

が得られる。net flux は、右に隣接しなから、次の結果が得られる。

$$\int_0^{\infty} J_{\nu} \kappa_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} B_{\nu} \kappa_{\nu} d\nu \quad (6)$$



これは、 $\mathcal{E}, E$  で radiative equilibrium にある大気に対して成り立つ。物理的にこの結果は、 $\mathcal{E}$  の mass element を、その放射平衡のための energy を吸収し、それを再放射することを示している。

このことは興味ある理想化された問題、即ち、吸収係数が振動数に無関係である灰色大気 gray atmosphere に関する。optical thickness は、

$$\tau = \int_{\mathcal{E}}^{\infty} \bar{\kappa} \rho dz \quad (7)$$

で表えられるが、 $\bar{\kappa}$  を求める方法は、ここでは得られない。Transfer equation (1) は、 $\nu$  について積分すると

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - B \quad (8)$$

と書ける。上と全採にすれば、直ちに  $B = J$  であることが判り、従って、gray atmosphere における integrated intensity distribution は、前に考えた constant net flux problem の解で表えられることが判る。この問題は、( ) で表えられる emergent flux

$$I_{\text{gray}}(0, \mu) = \frac{3^{1/2}}{4} FH(\mu) \quad (9)$$

と判る。又、(Kopff-Bronstein) の関係 ( )

$$J_{\text{gray}}(0) = \frac{3^{1/2}}{4} F \quad (10)$$

を得る。integrated Planck intensity は、

$$\pi B(T) = \pi \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) d\nu = \sigma T^4 \quad (11)$$

に於て local temperature と関連している。この式は、 $\pi F = \sigma T_e^4$  と一緒にすると、gray atmosphere に対する有効温度と境界温度との関係

$$T_0^4 = \frac{3^{1/2}}{4} T_e^4 \quad (12)$$

を得る。ここで  $T_0$  は表面温度を表わしている。数値的にこれは

$$T_0 = 0.81 T_e \quad (12')$$

を意味する。

gray atmosphere 中の温度分布は constant net flux problem に対する source function [(32)式].

$$J(\tau) = \frac{3}{4} F [1 + g(\tau)] \quad (13)$$

から求められる。函数  $g(\tau)$  は、非常に緩やかに変動し、それは  $\tau=0$  で 0.58 から  $\tau \rightarrow \infty$  で 0.71 まで単調に変わる。簡単な  $g(\tau) = 2/3$  をとり、(120), (11), 式を用いる。

$$T^4 = \frac{1}{2} T_e^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right) \quad (14)$$

と書ける。これは gray atmosphere における温度分布の標準の結果である。

$$I(0, \mu) = \int_{t_0}^{\infty} B(t) e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu} \quad (15a)$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} B_0 \left(1 + \frac{3}{2} t\right) e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu} \quad (15b)$$

$$= B_0 \left(1 + \frac{3}{2} \mu\right) \quad (15c)$$

だから [(14), (11), ( ) 参照] この簡単な場合、白色星での limb darkening を計算するのは簡単な問題である。この結果の対に limb darkening は

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = 1 - u + u\mu \quad (16)$$

と書くことができる。今の場合  $u = 3/5$  である。これは観測値が  $u \approx 0.56$  である太陽に対して妥当な値の表式である。limb darkening は波長の函数として容易に計算でき、それは各長り妥当な観測と一致が見られる。吾々は limb darkening が太陽大気中の温度傾斜の直接結果であることに気付く。



## Departures from grayness

grayness  $\kappa_V = \bar{\kappa} = \text{constant}$  の場合の  $\kappa_V$  の capacity を

$$\kappa_V = \bar{\kappa} (1 + \delta_V) \quad (17)$$

と書き、 $\delta_V$  が深さ  $\tau$  に対して変化するかと考へることに依り考へる。各層  $\tau$  における  $\bar{\kappa}$  の定義は既に特定されたと仮定しておく。equation of transfer は

$$\mu \frac{dI_V}{d\tau} = I_V - B_V + \delta_V (I_V - B_V) \quad (18)$$

である。吾々は grayness の場合の  $\mu$  の予想 — 或は期待 — がある。逐次法を採用し、gray の場合の解から  $\delta_V (I_V - B_V)$  の項を評価することとする。equation of transfer を用いて

$$\mu \frac{dI_V'}{d\tau} = I_V' - B_V' + \delta_V \mu \frac{dI_V}{d\tau} \quad (19)$$

である。この  $I_V'$  は nongray 或は修正された量を表わす。この式を  $\mu$  について積分すると

$$B_V' = J_V' + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} \mu \delta_V \frac{dI_V}{d\tau} d\mu dV \quad (20a)$$

$$= J_V' + \frac{d}{4d\tau} \int_0^{\infty} \delta_V F_V dV \quad (20b)$$

である。若し

$$\bar{\kappa} \int_0^{\infty} F_V dV = \int_0^{\infty} \kappa_V F_V dV \quad (21)$$

と定義すれば Chandrasekhar mean  $\bar{\kappa}$  を導入すれば、この flux についての直接平均が (20b) の積分が 0 になることは明らかである。従って吾々は (21) の定義した opacity を持つ gray atmosphere に戻すのである。この事実が Chandrasekhar mean の利便である。これより内部構造の理論が得られる。内部に対しては Rosseland mean の方が良好であることが明らかである。若し  $\bar{\kappa}$  の異なる mean opacity を用いる場合は atmosphere solution と interior solution とを接続 (8) とおける。或る困難な予想が得られる。この事実が  $\tau - \tau$  relation に対する equation of transfer の解の精度が要求されること、数値解に頼ることは避けられないことである。

nongray problem を数値的に取扱うための方法を説明しよう。equation of transfer の形式解を mean intensity の定義に代入すれば結果として L.T.E. の場合と

$$J_\nu = \int_0^\infty B_\nu(t_\nu) E_1(|\tau_\nu - t_\nu|) dt_\nu \quad (22)$$

を見出す。この式に与えられた initial model から  $J_\nu$  を計算する。これを用いて net flux は一定であり、与えられた  $J_\nu$  の第 1 近似と

$$\int_0^\infty B_\nu' k_\nu d\nu = \int_0^\infty J_\nu k_\nu d\nu \quad (23)$$

の式 [(6) 式参照] に代入し、trial and error に従って修正値  $B_\nu'$  を求め続ける。この操作は逐次法 iterative procedure と見られるが、これは、 $\tau$  の optical depth に対して急速に収束する。

比較的深い層で有用な方法は、(深い層で成り立つ) Eddington の近似を利用する。輻射場は略して isotropic とおき、基礎的定義は  $J = 3K$  とする [( ) ( ) 参照]。従って ( ) 式は Eddington の近似と

$$\frac{dJ}{d\tau} = \frac{3}{4} F \quad (24)$$

と要する。この式を積分すれば次の形になる。

$$J(\tau) = \frac{1}{2} F(0) + \frac{3}{4} \int_0^\tau F d\tau \quad (25)$$

ここで与えられた  $J(0) = F(0)$  という条件と想用 (25) 式は、強いて isotropic な輻射場の近似 (対称性) である。与えられた gray atmosphere に対して energy が保存の式

$$B(\tau) = J(\tau) - \frac{1}{4} \frac{dF}{d\tau} \quad (26)$$

を得る。若し之を又式から  $J(\tau)$  と消去すれば  $B(\tau)$  の変化と flux  $F$  の変化 (対称

$$-\Delta B(\tau) = +\frac{1}{2} \Delta F(0) + \frac{3}{4} \int_0^\tau \Delta F(\tau) d\tau - \frac{1}{4} \frac{d[\Delta F(\tau)]}{d\tau} \quad (27)$$

と書くことができる。この式に  $\tau$  に対して  $\tau$  の温度分布に於いて

$$F_\nu = 2 \int_{\tau_\nu}^\infty B_\nu(t_\nu) E_2(t_\nu - \tau_\nu) dt_\nu - 2 \int_0^{\tau_\nu} B_\nu(t_\nu) E_2(\tau_\nu - t_\nu) dt_\nu \quad (28)$$



を用いて monochromatic flux を求めることができる。これは (22) 式を等価的に用いたのと同じ方法で求められる。すなわち厚さ  $z$  における (28) 式を振動数  $\nu$  について積分して  $F$  を求め、それを要求する値と比較することができる。

## Astrophysics

Apr. 21f (1) 天体物理とは、等級、距離(1).

25t (2) 距離(2), 絶対等級.

28f (3) 温度: ステットン分類(1).

May 2t (4) ステットン分類(2), 種々の等級(1).

5f ( ) 祝日

9t ( ) 学会

12f ( ) 学会

16t (5) 種々の等級.

19f (6) HR図

23t (7) 大湯 model, 輻射論, 温度(1).

26f (8) 温度, 平均温度, 光度(1).

30t (9) 流量(2), 不変性, 定数.

Jun. 2f ( ) 大学祭

6t (10) 輻射圧, 重力, 黒体物体(1).

9f (11) 虫体(2).

13t (12) 漸近形, 減衰と放射.

16f (13) 吸収, 放射係数,  $h\nu E$ .

20t (14) 平衡, 輻射平衡(1).

23f (15) 輻射平衡, 平衡解.

27t (16) Eddington 1st appx.

30f (17) 同色減衰, 角起と電離(1)

Jul. 4t (18) 角起と電離(2).

7f (19) Boltzmann, Schrod.

Sep. 12t ( ) gas圧と電子圧(1)

15f ( ) 祝日

19t (20) gas圧と電子圧(2), 吸収解.

22f (21) 遷移確率 輻射減衰

26t (22) ドップラー増幅.

29f ( ) 吸収係数.

Oct. 3t ( )