

## Chapter 4.

### 輻射理論の基本概念

The Basic Concepts of the Radiation Theory

### 輻射輸達方程式

The Equation of Radiative Transfer

- § 1. 基本的な定義
- § 2. 黒体輻射
- § 3. 輻射の吸収と放出
- § 4. 局所熱力学的平衡
- § 5. 輻射輸達の方程式

## § 1. 基本的な定義

恒星大気理論の基本的な目標は、物理法則に基づいて、恒星の最外層を流れるエネルギーを記述し、表面から放出される輻射の観測的な特性を予想することである。例えば、太陽光球は、我々が受け取るエネルギーの殆どを輻射の形で放出しており、輻射平衡の状態にあると考えられる。このような輻射場や、それと恒星大気物質との相互作用を、主にマクロ的macroscopicな観点から考察する。そのために、我々は恒星大気中の輻射場を、振動数（又は波長）の関数としてのエネルギー強度、エネルギー流量、エネルギー密度などの量で指定しなければならない。そこで先ず輻射場を量的に解析するのに必要な、これらの輻射に関する諸量を定義する。

### 1. 1. (比)強度 (Specific Intensity)

恒星大気中の物理性質を調べるには、大気中のある点Pを通じて、ある時刻tに、ある方向Sに向かって流れる、振動数 $\nu$ （或いは波長 $\lambda = c/\nu$ ）の輻射エネルギーの量を知らねばならない。このため、輻射の(比)強度を次のように定義する。

あらゆる方向に輻射が流れている輻射場内の1点P ( $r; x, y, z$ ) を考える。P点を含む微小な面積要素  $d\sigma$  をとり、その法線をNとする。任意の方向SはこのNを規準にして角度 ( $\theta, \phi$ ) で指定できる。

今、時間( $t, t+dt$ )の間に、面積  $d\sigma$  を通り、S方向に、立体角  $d\omega$  内を流れてゆく輻射の内、振動数( $\nu, \nu+d\nu$ )の輻射エネルギー量が  $dE_\nu$  であるとすれば

$$dE_\nu = I_\nu(r, S, t) \cos\theta \, d\sigma \, d\nu \, d\omega \, dt \quad (1)$$

と書くことができ、この係数  $I_\nu(r, S, t)$  或いは  $I_\nu(x, y, z; \theta, \phi; t)$  のことを

1. P点( $r$  或いは、 $x, y, z$ )における
2. S方向 ( $\theta, \phi$ )への
3. 時刻tにおける
4. 振動数 $\nu$ の輻射 ( $\nu$ 輻射)

の(比)強度 (Specific Intensity) と定義する。言いかえれば、強度  $I_\nu$  とはある時刻tに、P点で単位面積当り ( $d\sigma = 1\text{cm}^2$ )、垂直 ( $\cos\theta = 1$ ) な方向Sに向かって、毎秒 ( $dt = 1\text{sec}$ )、単位立体角 ( $d\omega = 1$ ) 内に流れる、単位振動数当り ( $d\nu = 1$ ) の $\nu$ 輻射のエネルギー量である。

一般に  $I_\nu$  は位置、方向、時刻、振動数の複雑な関数であるが、特別な輻射場として、

1. 位置に依らないものを均一homogeneousな
2. 方向に依らないものを等方的isotropicな
3. 時間に依らないものを定常的steadyな

輻射場と言う。熱力学的平衡にある空洞内の輻射場（空洞輻射、黒体輻射）は均一、等方的、定常的な理想的輻射場であるが、太陽のような星では、多くの問題で、一応定常的と見なすことができても変数から除外できるが、均一でもなく、等方的でもない。即ち、太陽大気内の位置と方向によって輻射強度が異なり、 $I_\nu(x, y, z; \theta, \phi)$ である。

急速な自転による遠心力、連星による潮汐力、磁場による大気構造の歪などが無視できる太陽のような星の構造は、ほぼ球対称と見なせる。すると大気中の位置は球の中心からの距離  $r$  だけで1次元的に指定できる。 $I_\nu(x, y, z; \theta, \phi) \rightarrow I_\nu(r; \theta, \phi)$ と書ける。

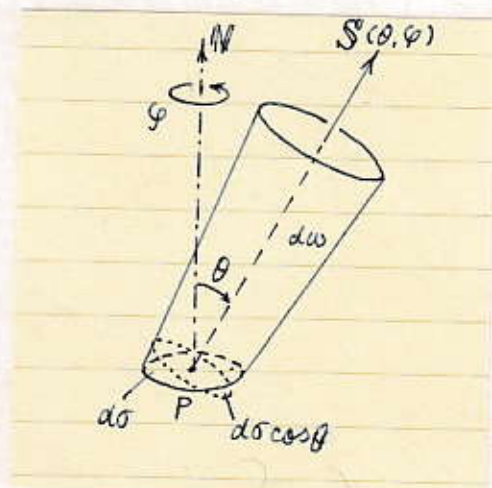
更に、太陽光球のように半径に比べて薄い大気層を考える時は、曲率を無視して平行平面層plane parallelと見なせるので、位置はある規準面からの垂直距離、即ち高さや深さのような1変数で指定できる。例えば光球表面から垂直上方に測った高さ  $z$ （従って光球内では負）が用いられる。またこの場合、輻射場の方向性は垂直線の回りに軸対称と見なせるので、方向  $S$  は  $\phi$  に無関係に垂直線からの角  $\theta$  だけで指定され  $S(\theta)$ 、結局、輻射強度は  $I_\nu(r; \theta, \phi) \rightarrow I_\nu(z, \theta)$ と書ける。

また、変数  $\theta$  の代わりに、その余弦  $\mu$  を変数にとり、

$$\mu = \cos \theta, \quad d\mu = -\sin \theta d\theta \quad (2)$$

これを用いて強度を  $I_\nu(z, \mu)$  と書くこともある。

我々は、取りあえずこのような限定された場合を考察しよう。



1. 2. 平均強度 Mean intensity

立体角要素  $d\omega$  は極座標を使って一般的に

$$d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi = -d\mu \, d\phi \quad (3)$$

$$\oint d\omega = \int_{\mu=0}^{2\pi} \int_{\mu=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \int_{\mu=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^1 d\mu \, d\phi = 4\pi$$

と書くことができる。輻射強度  $I_\nu(z, \mu)$  をあらゆる方向について全立体角に亙って平均した平均強度  $J_\nu(z)$  は

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \oint I_\nu(z, \mu) d\omega / \oint d\omega \\ &= \int_{\mu=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^1 I_\nu(z, \mu) d\mu \, d\phi / 4\pi \\ &= \int_{\mu=0}^{2\pi} d\phi \int_{\mu=-1}^1 I_\nu(z, \mu) d\mu / 4\pi \\ &= 2\pi \int_{\mu=-1}^1 I_\nu(z, \mu) d\mu / 4\pi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mu=-1}^1 I_\nu(z, \mu) d\mu \end{aligned} \quad (4)$$

強度  $I_\nu(z, \mu) = I_\nu(z)$  の等方的な輻射場では、平均強度  $J_\nu(z)$  は明らかに

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{\mu=-1}^1 I_\nu(z) d\mu = I_\nu(z) \cdot \frac{1}{2} \int_{\mu=-1}^1 d\mu = I_\nu(z)$$

である。

### 1. 3. 輻射流量 Radiation flux

面積要素  $d\sigma$  を通り、 $dt$  時間内に  $N^-$  側から  $N^+$  側へ流れる  $(\nu, \nu + d\nu)$  輻射のエネルギーは(1)式を  $d\omega$  について上半球に亙って積分し

$$\begin{aligned} \delta E_\nu &= d\sigma dt d\nu \oint I_\nu \cos\theta d\omega \\ &= d\sigma dt d\nu \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_\nu(z, \theta) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

ここで単位面積 ( $d\sigma=1$ )、単位時間 ( $dt=1$ ) に流れる単位振動数 ( $d\nu=1$ ) 当りの輻射量を  $\mathcal{F}_\nu^+(z)$  と書けば

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu^+(z) &= \oint I_\nu(z, \theta) \cos\theta d\omega \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_\nu(z, \theta) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} I_\nu(z, \mu) \mu d\mu \end{aligned} \quad (5)$$

であり、これを P 点における  $N^+$  方向への輻射流量と言う。同様に  $N^-$  方向へは

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu^-(z) &= \oint I_\nu(z, \theta) \cos\theta d\omega \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} I_\nu(z, \theta) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \\ &= -2\pi \int_0^{\pi/2} I_\nu(z, \mu) \mu d\mu \end{aligned} \quad (6)$$

これらの  $N^+$  方向と  $N^-$  方向への流量の差、即ち、正味  $N^+$  方向への輻射流量を  $N^+$  方向への真流量 Net flux  $\mathcal{F}_\nu(z)$  と言い、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu(z) &= \mathcal{F}_\nu^+(z) - \mathcal{F}_\nu^-(z) \\ &= \oint I_\nu(z, \theta) \cos\theta d\omega \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\nu(z, \theta) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu d\mu \end{aligned} \quad (7)$$

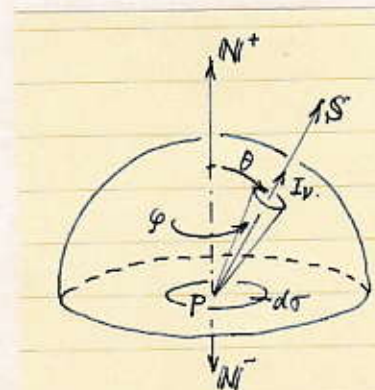
等方的な輻射場では、 $I_\nu(z, \mu) = I_\nu(z)$  は角積分の外に出て

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu^+(z) &= \pi I_\nu(z), \\ \mathcal{F}_\nu^-(z) &= -\pi I_\nu(z), \\ \mathcal{F}_\nu(z) &= \mathcal{F}_\nu^+(z) - \mathcal{F}_\nu^-(z) = 0 \quad (\text{等方的な輻射場}) \end{aligned} \quad (8)$$

若し、P 点が星の表面の点 ( $z=0$ ) であれば、連星の場合で相手星から流入する輻射でもなければ、 $\mathcal{F}_\nu^-(0) = 0$  であるから、

$$\mathcal{F}_\nu(0) = \mathcal{F}_\nu^+(0)$$

である。この星の表面  $1\text{cm}^2$  当り毎秒放出されるエネルギー量を星の表面輝度 surface brightness またはエミッタンス Emissance と言う。



1. 3. 1. 天体物理学的輻射流量 Astrophysical radiation flux

輻射流量  $\mathcal{F}_\nu(z)$ 、 $\mathcal{F}_\nu^+(z)$ 、 $\mathcal{F}_\nu^-(z)$  などは、 $\pi$  因子を含めて

$$\begin{aligned} F_\nu(z) &= \mathcal{F}_\nu(z)/\pi = 2 \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu d\mu \\ F_\nu^+(z) &= \mathcal{F}_\nu^+(z)/\pi = 2 \int_0^1 I_\nu(z, \mu) \mu d\mu \\ F_\nu^-(z) &= \mathcal{F}_\nu^-(z)/\pi = -2 \int_{-1}^0 I_\nu(z, \mu) \mu d\mu \end{aligned} \quad (9)$$

と書く習慣で、 $F_\nu(z)$  などを (天体物理学的) 流量と言う。

太陽の場合、disk が見え、disk 内の中心から距離  $r$  の各点からは、大気表面の法線に対して角度  $\theta$  [ $= \sin^{-1}(r/R)$ ] で観測者に向かう輻射  $I_\nu(0, \theta)$  が出てくる。

しかし、点光源にしか見えない一般の星では、disk 上の  $I_\nu(0, \theta)$  を disk 全体に亙って平均的に見ているわけで、この平均を  $\langle I_\nu \rangle$  と書けば、表面要素  $d\sigma$  に対応する disk 上の面積要素は  $d\sigma \cos\theta$  だから

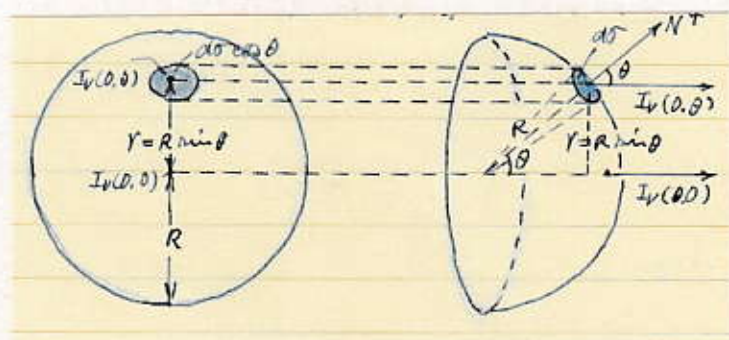
$$\langle I_\nu \rangle = \int I_\nu(0, \theta) d\sigma \cos\theta / \int d\sigma \cos\theta$$

ここで  $d\sigma$  を球の中心から見た立体角  $d\omega$  を使って

$$d\sigma = R^2 d\omega = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

と書き換え、積分は観測者側の半球についてとればよい。分母は明らかに disk 面積  $\pi R^2$  に等く

$$\begin{aligned} \langle I_\nu \rangle &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_\nu(0, \theta) R^2 \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi / \pi R^2 \\ &= 2 \int_0^1 I_\nu(0, \mu) \mu d\mu \\ &= \mathcal{F}_\nu^+(0) / \pi = \mathcal{F}_\nu(0) / \pi \\ &= F_\nu^+(0) = F_\nu(0) \end{aligned} \quad (10)$$



1. 4. 強度の不変性 *invariance of the intensity*

強度  $I$  を用いる便利な点は、視線に沿っての途中にエネルギーの増減がない場合、光源と観測者との距離に無関係な方法で定義されることである。

$P$  点における面積  $d\sigma$  と、 $P'$  点における面積  $d\sigma'$  を共通に通る輻射光束のエネルギー量  $dE_\nu$  は双方の強度  $I_\nu$ 、 $I_\nu'$  を用いて書き表せば

$$dE_\nu = I_\nu d\sigma \cos\theta d\omega d\nu dt = I_\nu' d\sigma' \cos\theta' d\omega' d\nu dt$$

但し、 $d\omega$  は  $P$  から見て  $d\sigma'$  が張る立体角、 $d\omega'$  は  $P'$  点から見て  $d\sigma$  が張る立体角である。図から

$$d\omega = d\sigma' \cos\theta' / r^2, \quad d\omega' = d\sigma \cos\theta / r^2$$

だから

$$\begin{aligned} dE_\nu &= I_\nu d\sigma \cos\theta (d\sigma' \cos\theta' / r^2) d\nu dt \\ &= I_\nu' d\sigma' \cos\theta' (d\sigma \cos\theta / r^2) d\nu dt \end{aligned}$$

となり、これから

$$I_\nu = I_\nu' \quad (11)$$

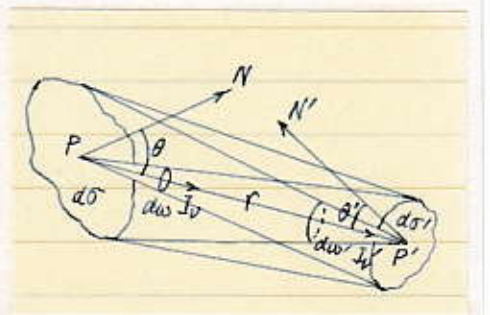
前節の議論により、星は disk 面積  $\pi R^2$  について平均的に  $\langle I_\nu \rangle = F_\nu(0) = \mathcal{F}_\nu(0)/\pi$  の強度を持っていると考えられるから、我々が受け取る強度は

$$I_\nu' = I_\nu = \mathcal{F}_\nu(0)/\pi, \quad d\omega' = \pi R^2 / r^2$$

である。観測者が、星に垂直に向けた単位面積 ( $d\sigma' \cos\theta' = 1$ )、単位時間 ( $dt = 1$ ) 当り星から受け取るエネルギー量、即ち、星からの流量は単位振動数 ( $d\nu = 1$ ) 当り

$$\begin{aligned} dE_\nu' &= I_\nu' d\sigma' \cos\theta' d\omega' d\nu dt \\ &= I_\nu' d\omega' \\ &= \mathcal{F}_\nu(0) \cdot (R/r)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

である。(12)式には、星からのエネルギー流量が星の距離  $r$  の2乗に逆比例するという基本的な事実を含んでいる。



### 1. 5. 輻射エネルギー密度 Radiative energy density

輻射場内の、ある点Pで、単位体積当りに存在する輻射エネルギーを輻射エネルギー密度と言う。輻射強度  $I_\nu$  は定義により、『単位面積を垂直に、単位時間には、単位立体角内を通過する  $\nu$  輻射の、単位振動数当りのエネルギー量である』から、エネルギー密度  $u_\nu$  と強度  $I_\nu$  を関係付けるためには、P点を含む任意の閉曲面  $\sigma$  で囲まれた無限小体積  $V$  を考え、その全表面から、あらゆる立体角で流れ込む輻射エネルギーが、 $V$ 内にどれだけ留まっているかを調べればよい。

$V$ の表面要素  $d\sigma$  を通って強度  $I_\nu$  の輻射がある立体角  $d\omega$  で流れ込む時、そのエネルギー量は

$$\delta E_\nu = I_\nu d\sigma \cos\theta d\nu d\omega dt \quad (13)$$

今、このような光子だけが  $V$ 内を通って行くとすれば、その  $V$ 内の径路長を  $s$  とし、それらは  $dt = s/c$  時間だけ  $V$ 内に留まる。更に、 $d\sigma \cos\theta \cdot s = dV$  はそのような光子の掃過するシリンダー状の体積要素である。従って、上式は

$$\delta E_\nu = (1/c) I_\nu d\nu d\omega dV \quad (14)$$

$V$ 内に留まっている全輻射エネルギーは、(13)式を全表面、全立体角について積分したもの、或いは、(14)式を全体積、全立体角について積分したものである。

$$E_\nu d\nu = (1/c) \int_V \int_\omega I_\nu d\nu d\omega dV$$

しかし、 $V$ は任意に小さく、その中で  $I_\nu$  が一定と見なせるほど、小さく取れるから

$$E_\nu d\nu = (1/c) \int_V dV \int_\omega I_\nu d\nu d\omega = (V/c) \int_\omega I_\nu d\nu d\omega$$

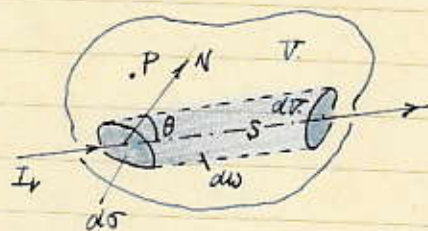
最後に、エネルギー密度  $u_\nu = E_\nu / V$  とすれば

$$u_\nu = (1/c) \int_\omega I_\nu d\omega = (4\pi/c) J_\nu \quad (15)$$

となる。

特に、等方的な輻射場では、 $I_\nu$  は方向に無関係で  $\int_\omega d\omega$  積分の外に出て、

$$u_\nu = (4\pi/c) I_\nu \quad (\text{等方的輻射場}) \quad (16)$$





### 1. 6. 輻射圧 Radiation Pressure

輻射は流れて行く面に圧力を及ぼす。これを輻射圧（光圧）と言う。量子論的に、エネルギー  $E (= h\nu)$  の光子は光束と同じ方向に運動量  $E/c (= h\nu/c)$  を伴っている。従って、マクロ的にエネルギー  $dE_\nu$  の光束は、その方向に運動量  $dE_\nu/c$  を伴っている。

輻射圧は、考えている点  $P$  において、任意の方向を持つ単位面積を通過して単位時間内に運ばれる運動量の、その面への垂直成分に等しい。

面積要素  $d\sigma$  を通過して  $dt$  時間内に立体角  $d\omega$  内に、法線  $N$  と傾き  $\theta$  で通過する輻射エネルギー  $dE_\nu$  は

$$dE_\nu = I_\nu d\sigma \cos\theta d\nu d\omega dt$$

で、これに伴って運ばれる運動量は  $dE_\nu/c$  であり、その中、面に垂直な成分は  $dE_\nu \cos\theta/c$  であり、単位面積 ( $d\sigma=1$ )、単位時間 ( $dt=1$ )、単位振動数 ( $d\nu=1$ ) 当り、この光束が面に与える輻射圧は

$$dp_{r\nu} = (1/c) I_\nu \cos^2\theta d\omega$$

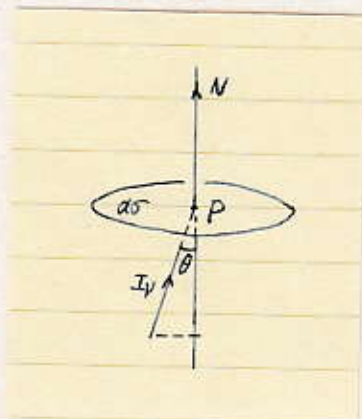
あらゆる方向からくる輻射光束によって、この面が受ける輻射圧は

$$\begin{aligned} p_{r\nu} &= (1/c) \oint_\omega I_\nu \cos^2\theta d\omega \\ &= (2\pi/c) \int_0^{\pi/2} I_\nu(z, \mu) \mu^2 d\mu \end{aligned} \quad (17)$$

等方的な輻射場では  $I_\nu$  は角積分の外に出て、(16)式を参照すれば

$$p_{r\nu} = (4\pi/3c) \cdot I_\nu = \frac{1}{3} u_\nu \quad (\text{等方的な輻射場}) \quad (18)$$

この輻射圧は光子によって吸収層に及ぼされる力学的な力と混同してはいけない。



### 1. 7. 輻射場の能率 Moments of radiation field

(4),(7),(17) 式を見ると、輻射強度の角積分が現われている。一般的な形で書いて

$$M_\nu(z, n) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu^n d\mu \quad (19)$$

を輻射場のn次のモーメント Moment と定義する。エディントン Eddington に倣って、特定の文字を使う習慣がある。

0次のモーメント  $M_\nu(z, 0)$  は平均強度であり、

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) d\mu \quad (20)$$

1次のモーメント  $M_\nu(z, 1)$  は エディントン流量 Eddington flux と呼ばれ、

$$H_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu d\mu = \mathcal{F}_\nu(z)/4\pi = F_\nu(z)/4 \quad (21)$$

2次のモーメント  $M_\nu(z, 2)$  はK積分と呼ばれ

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu^2 d\mu = (c/4\pi) p_{r\nu} \quad (22)$$

輻射輸達の詳細な理論のは更に高次のモーメントが用いられる。等方的な輻射場では

$$J_\nu(z) = 3K_\nu(z) \quad (\text{等方的な輻射場})$$

であることが判る。

### 1. 8. 単色及び全輻射 Monochromatic and total radiation

これまでの式では特定な振動数 ( $\nu, \nu + d\nu$ ) の輻射 ( $\nu$  輻射) について表してきたが、このような輻射を単色輻射 Monochromatic radiation と言う。同じ領域の輻射を、観測的には波長単位で ( $\lambda, \lambda + d\lambda$ ) で表すことが多い。この場合、これまでの式を形式的に

$$I_\nu d\nu \rightarrow I_\lambda d\lambda, \quad J_\nu d\nu \rightarrow J_\lambda d\lambda, \quad \mathcal{F}_\nu d\nu \rightarrow \mathcal{F}_\lambda d\lambda, \quad \text{etc.} \quad (23)$$

と置き換えればよい。

$\nu$  と  $\lambda$  との変換は

$$\lambda \nu = c, \quad d\nu = -(c/\lambda^2) d\lambda$$

だから、 $d\nu$  と  $d\lambda$  とは増減が逆符号の対応をするものだが、それぞれの場合、 $d\nu$  も  $d\lambda$  も正で記述されるため、その符号を  $I_\nu$  や  $I_\lambda$  に含めて考える。符号を別にして  $I_\nu$ ,  $I_\lambda$  の数値は同じではなく

$$\begin{aligned} I_\nu &= (\lambda^2/c) I_\lambda \\ I_\lambda &= (\nu^2/c) I_\nu \end{aligned} \quad (24)$$

$$\nu I_\nu = \lambda I_\lambda$$

の関係がある。強度  $I$  で説明したが、 $I$  の他、 $J$ ,  $F$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $u$  についても同様である。

全振動数 (全波長) 領域に互っての全輻射 Total radiation を問題にする時は  $\nu$  について独立に積分し、例えば、

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu, \quad J = \int_0^\infty J_\nu d\nu, \quad \mathcal{F} = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu, \quad \text{etc.} \quad (25)$$

であるから、これまでの式で形式的に

$$I_\nu d\nu \rightarrow I, \quad J_\nu d\nu \rightarrow J, \quad \mathcal{F}_\nu d\nu \rightarrow \mathcal{F}, \quad \text{etc.} \quad (26)$$

と置き換えればよい。

## § 2. 黒体輻射 Black body radiation

高温物体から放出される輻射の強度と振動数 $\nu$ との関係は、黒体について得られている。また定温に保たれた壁で囲まれた空洞内では、エネルギーの出入りはなく、輻射はその近傍と熱平衡にあり、毎秒、面積  $1 \text{ cm}^2$  当り放出される輻射はどの振動数についても、その面積  $1 \text{ cm}^2$  が吸収する量に等しくなり、黒体輻射の条件が満たされる。このため、黒体輻射のことを空洞輻射 Hohlraumstrahlung とも言う。またこの性質は、物質の種類に無関係に温度だけで決るので、温度輻射とも言い、また研究者に因んでプランク輻射とも言う。

星の内部では、輻射に対する物質の著しい吸収能のため、非常に不透明であり、星の内部の任意の小容積について考えると、その中に存在する大きい輻射量に比較して、そこを通過して行く輻射量は極めて微量である。平均温度傾斜は  $0.2^\circ \text{ K} / 10 \text{ m}$  であり、その容積は断熱材で囲まれてエネルギーの出入りのない空洞内の輻射場の状態に近く、その点の温度に対応する黒体輻射の性質を持っている。

しかし、星の外層の、半透明な領域になると、流出する輻射量が無視量でなくなり、黒体輻射の法則は次第に当てはまらなくなる。

2. 1. 輻射強度、プランクPlanckの法則 (1901)

熱力学的平衡状態において、物体が放出する輻射の強度 $B_\nu(T)$ は、振動数 $\nu$ と温度 $T$ との関数として次のように与えられる。

$$B_\nu(T) d\nu = 2h\nu^3 c^{-2} \{ \exp(h\nu/kT) - 1 \}^{-1} d\nu \quad (1)$$

ここで

$$\begin{aligned} h &= 6.626\ 20 \times 10^{-27} \text{ erg}\cdot\text{s} && \text{(Planck constant)} \\ c &= 2.997\ 925 \times 10^{10} \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1} && \text{(light velocity)} \\ k &= 1.380\ 62 \times 10^{-16} \text{ erg}\cdot\text{deg}^{-1} && \text{(Boltzmann constant)} \\ &= 8.617\ 1 \times 10^{-5} \text{ ev}\cdot\text{deg}^{-1} \end{aligned}$$

この式を§1.8.に従って、波長 $\lambda$ の単位で書くと

$$B_\lambda(T) = 2hc^2 \lambda^{-5} \{ \exp(hc/\lambda kT) - 1 \}^{-1} d\lambda \quad (2)$$

§1.の定義から、輻射流量、輻射密度、輻射圧などは等方的な輻射場だから

$$\mathcal{F}_\nu^+ = \pi B_\nu(T)$$

$$\mathcal{F}_\nu = 0$$

$$u_\nu = (4\pi/c) B_\nu(T)$$

$$p_{r\nu} = \frac{1}{3} u_\nu = (4\pi/3c) B_\nu(T)$$

波長単位の流量 $\mathcal{F}_\lambda^+ = \pi B_\lambda(T)$  (3)

$$= 2\pi h c^2 \lambda^{-5} \{ \exp(hc/\lambda kT) - 1 \}^{-1}$$

$$= c_1 \lambda^{-5} \{ \exp(c_2/\lambda T) - 1 \}^{-1} \quad (3')$$

と書かれる。ここで $c_1$ 、 $c_2$ は、それぞれ第一および第二輻射定数 1st and 2nd radiation constants と呼ばれ

$$c_1 = 2\pi h c^2 = 3.741\ 85 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$c_2 = hc/k = 1.438\ 83 \text{ cm deg}$$

星の連続スペクトルの、ある波長範囲の強度曲線の傾斜を測定し、(2)式と比較して温度 $T$ を求め、その波長領域での色温度Color temperature と言う。

原子が放出する輻射がエネルギー $E = h\nu = hc/\lambda$ を持つ光子の集りだと考えれば、 $1\text{ cm}^2$ 、 $1\text{ sec}$ 当り、単位振動数領域 ( $d\nu = 1$ )、或いは、単位波長領域 ( $d\lambda = 1$ )に放出される光子放出Photon emittance $N_\nu$  或いは $N_\lambda$ は

$$N_\nu = \mathcal{F}_\nu^+ \cdot (h\nu)^{-1} = \pi B_\nu(T) \cdot (h\nu)^{-1}$$

$$= 2\pi \nu^2 c^{-2} \{ \exp(h\nu/kT) - 1 \}^{-1}$$

$$N_\lambda = \mathcal{F}_\lambda^+ \cdot (hc/\lambda)^{-1} = \pi B_\nu(T) \cdot (hc/\lambda)^{-1}$$

$$= 2\pi c \lambda^{-4} \{ \exp(c_2/\lambda T) - 1 \}^{-1} \quad (4)$$

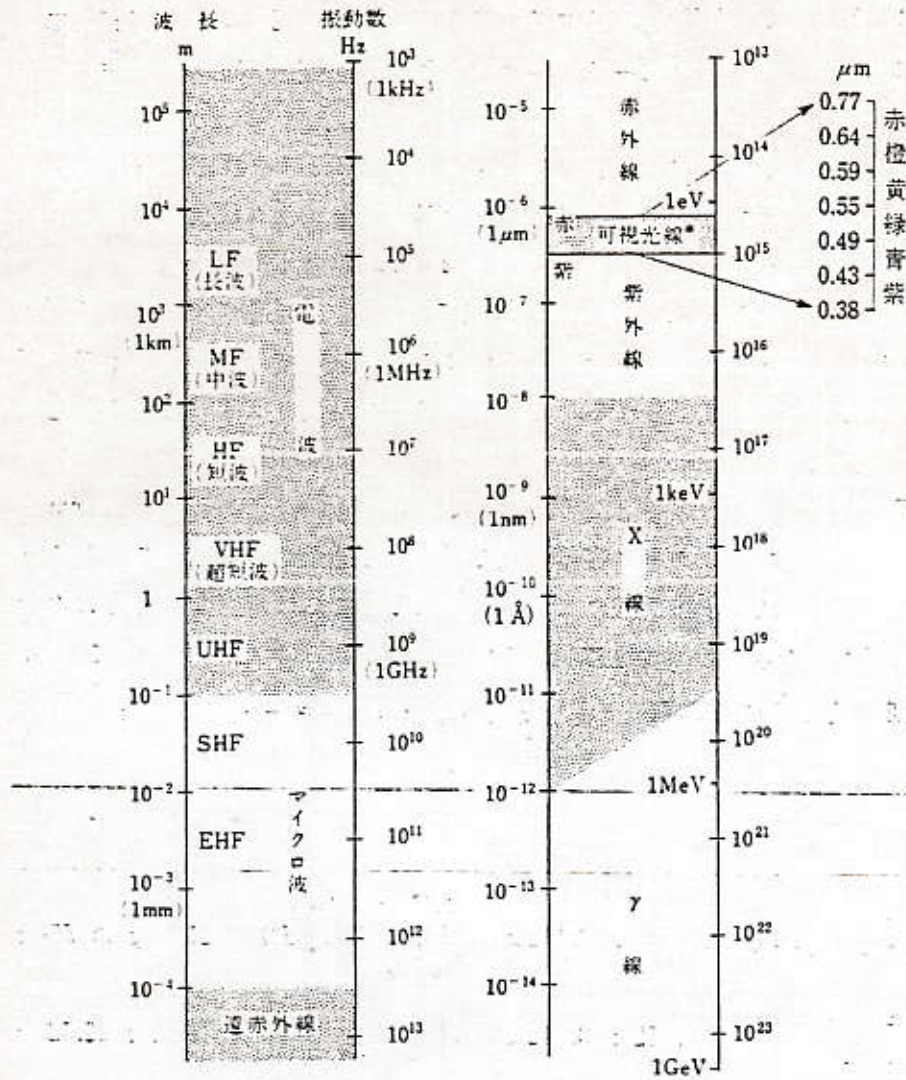
また、 $1\text{ cm}^3$  当りの光子の数密度Concentration $q_\nu$ は

$$q_\nu = u_\nu \cdot (h\nu)^{-1} = (4\pi/c) B_\nu(T) \cdot (h\nu)^{-1}$$

$$= 8\pi \nu^2 c^{-3} \{ \exp(h\nu/kT) - 1 \}^{-1} \quad (5)$$

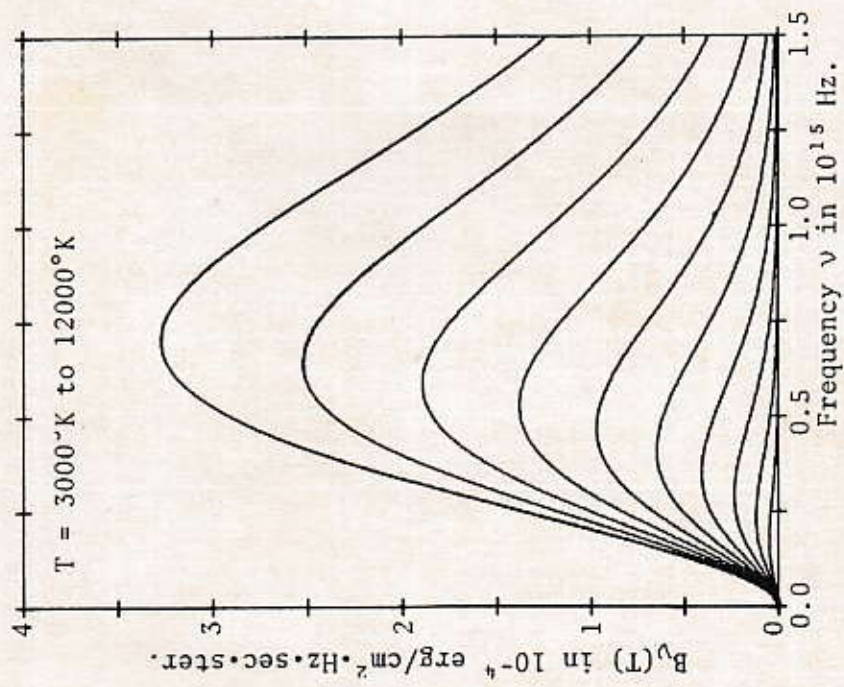
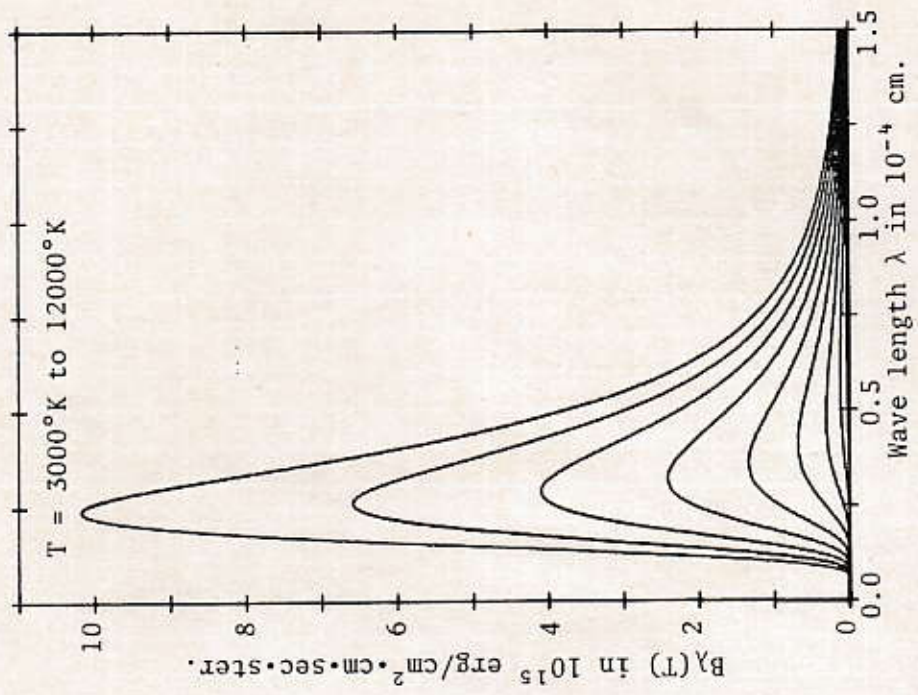
# 電 磁 気

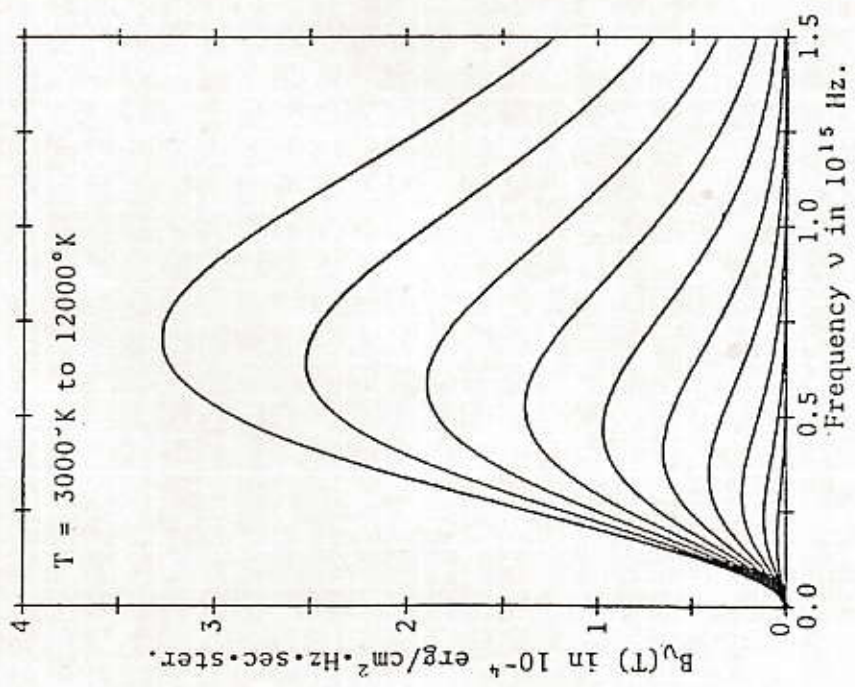
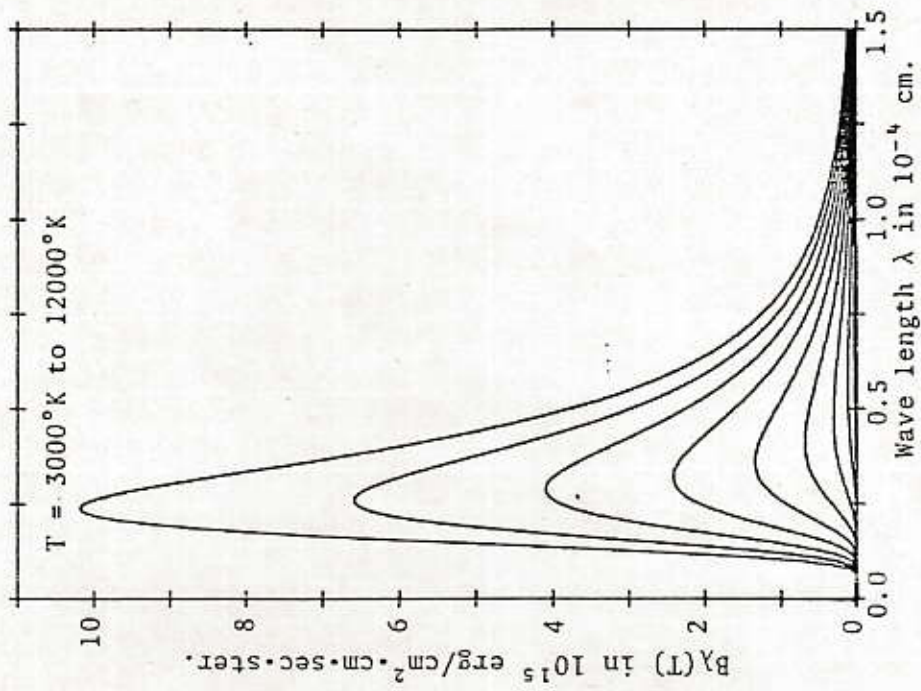
## 電磁波の波長と振動数



\* 可視光線の限界ならびに色の境界は人の眼によって違う。ここには大略の値があげてある。

Figure 2-2.—Ranges of the electromagnetic spectrum.







Tables of the Planck function

$\lambda T$	$x = c_2/\lambda T$	$\frac{\mathcal{F}_{0-\lambda}}{\mathcal{F}_{0-\infty}}$	$\frac{\mathcal{F}_\lambda}{\mathcal{F}_{\lambda \max}}$	$\frac{N_{0-\lambda}}{N_{0-\infty}}$	$\frac{N_\lambda}{N_{\lambda m}}$	$\frac{\mathcal{F}_\nu}{\mathcal{F}_{\nu m}}$
cm °K	large $x$	$x^3 e^{-x}$ 6.4939	$x^3 e^{-x}$ 21.201	$x^2 e^{-x}$ 2.404	$x^4 e^{-x}$ 4.780	$x^3 e^{-x}$ 1.4214
0.00	↑	↑	↑	↑	↑	↑
0.01	143.883	0.05 <sup>6</sup> 16	0.05 <sup>3</sup> 95	0.05 <sup>2</sup> 31	0.05 <sup>4</sup> 29	0.05 <sup>6</sup> 68
0.02	71.942	0.02 <sup>6</sup> 37	0.02 <sup>3</sup> 52	0.02 <sup>2</sup> 14	0.02 <sup>4</sup> 32	0.02 <sup>6</sup> 15
0.03	47.961	0.01 <sup>6</sup> 27	0.01 <sup>3</sup> 18	0.01 <sup>2</sup> 15	0.01 <sup>4</sup> 16	0.01 <sup>6</sup> 12
0.04	35.971	0.01 <sup>1</sup> 19	0.01 <sup>3</sup> 678	0.01 <sup>2</sup> 14	0.01 <sup>4</sup> 84	0.01 <sup>6</sup> 78
0.05	28.777	0.01 <sup>3</sup> 130	0.01 <sup>3</sup> 296	0.01 <sup>2</sup> 117	0.01 <sup>4</sup> 456	0.01 <sup>6</sup> 533
0.055	26.161	0.01 <sup>3</sup> 135	0.01 <sup>3</sup> 251	0.01 <sup>2</sup> 134	0.01 <sup>4</sup> 426	0.01 <sup>6</sup> 548
0.06	23.980	0.01 <sup>3</sup> 929	0.01 <sup>4</sup> 144	0.01 <sup>2</sup> 100	0.01 <sup>4</sup> 266	0.01 <sup>6</sup> 373
0.065	22.136	0.01 <sup>3</sup> 467	0.01 <sup>4</sup> 610	0.01 <sup>2</sup> 543	0.01 <sup>4</sup> 122	0.01 <sup>6</sup> 186
0.07	20.555	0.01 <sup>3</sup> 184	0.01 <sup>3</sup> 205	0.01 <sup>2</sup> 229	0.01 <sup>4</sup> 442	0.01 <sup>6</sup> 723
0.075	19.184	0.01 <sup>3</sup> 594	0.01 <sup>3</sup> 571	0.01 <sup>2</sup> 791	0.01 <sup>4</sup> 132	0.01 <sup>6</sup> 231
0.08	17.985	0.01 <sup>4</sup> 164	0.00137	0.01 <sup>2</sup> 232	0.01 <sup>4</sup> 338	0.01 <sup>6</sup> 633
0.085	16.927	0.01 <sup>4</sup> 399	0.00292	0.01 <sup>2</sup> 597	0.01 <sup>4</sup> 765	0.01 <sup>6</sup> 152
0.09	15.987	0.01 <sup>4</sup> 870	0.00562	0.01 <sup>2</sup> 137	0.00156	0.01 <sup>6</sup> 328
0.095	15.146	0.01 <sup>3</sup> 173	0.00994	0.01 <sup>2</sup> 288	0.00291	0.01 <sup>6</sup> 646
0.10	14.388	0.01 <sup>3</sup> 321	0.01640	0.01 <sup>2</sup> 558	0.00506	0.00118
0.11	13.080	0.01 <sup>3</sup> 911	0.03767	0.01 <sup>2</sup> 173	0.01278	0.00328
0.12	11.990	0.00213	0.07253	0.01 <sup>2</sup> 438	0.02684	0.00752
0.13	11.068	0.00432	0.12225	0.01 <sup>2</sup> 951	0.04898	0.01488
0.14	10.277	0.00779	0.18606	0.00183	0.08030	0.02628
0.15	9.592	0.01285	0.26147	0.00321	0.12091	0.04230
0.16	8.993	0.01971	0.34488	0.00522	0.17011	0.06361
0.17	8.464	0.02853	0.43231	0.00795	0.22656	0.09001
0.18	7.994	0.03933	0.51993	0.01150	0.28851	0.12137
0.19	7.573	0.05210	0.60440	0.01594	0.35402	0.15720
0.20	7.194	0.06672	0.68310	0.02129	0.42117	0.19686
0.22	6.540	0.10087	0.81632	0.03478	0.55363	0.28467
0.24	5.995	0.14024	0.91215	0.05179	0.67487	0.37854
0.26	5.534	0.18310	0.97090	0.07192	0.77819	0.47286
0.28	5.139	0.22787	0.99713	0.09461	0.86070	0.56323
0.30	4.796	0.27320	0.99717	0.11930	0.92220	0.64658
0.32	4.496	0.31807	0.97740	0.14541	0.96420	0.72110
0.34	4.232	0.36170	0.94358	0.17243	0.98901	0.78587
0.36	3.997	0.40327	0.90046	0.19994	0.99933	0.84078
0.38	3.786	0.44334	0.85177	0.22756	0.99781	0.88615
0.40	3.597	0.48084	0.80032	0.25500	0.98686	0.92258
0.45	3.197	0.56428	0.67164	0.32147	0.93174	0.97990
0.50	2.878	0.63370	0.55493	0.38328	0.85534	0.99951
0.55	2.616	0.69086	0.45572	0.43953	0.77269	0.99321
0.60	2.398	0.73777	0.37399	0.49009	0.69175	0.97001
0.65	2.214	0.77630	0.30764	0.53525	0.61645	0.93645

No.

max.  $F_\lambda, B_\lambda$  for max. photon emission  
 max  $F_\nu, B_\nu$

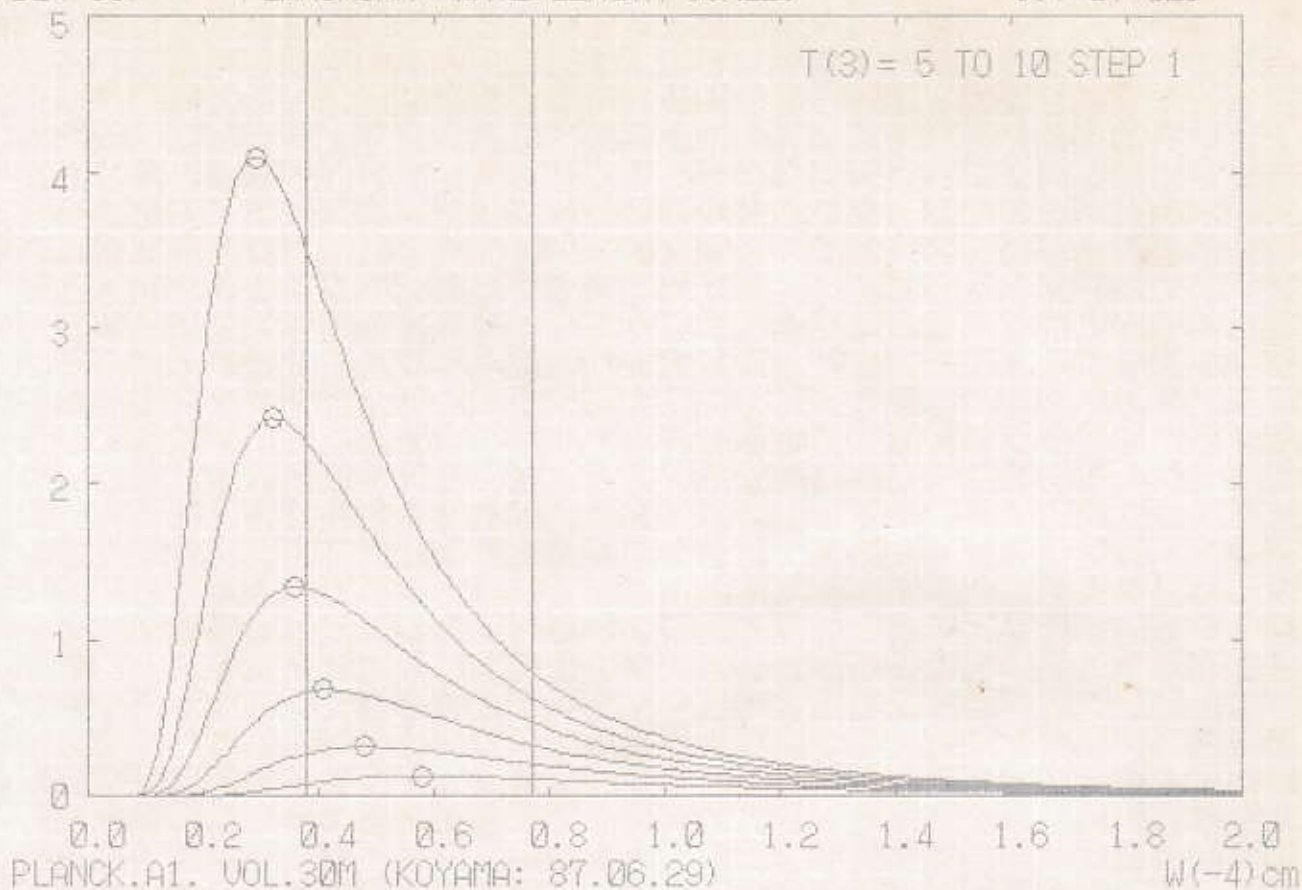
$\lambda T$	$x = c_2/\lambda T$	$\frac{F_{0-\lambda}}{F_{0-\infty}}$	$\frac{F_\lambda}{F_{\lambda \text{ max}}}$	$\frac{N_{0-\lambda}}{N_{0-\infty}}$	$\frac{N_\lambda}{N_{\lambda \text{ max}}}$	$\frac{F_\nu}{F_{\nu \text{ max}}}$
cm °K						
0.7	2.0555	0.80806	0.25411	0.57542	0.54835	0.80708
0.8	1.7985	0.85624	0.17610	0.64299	0.43428	0.81196
0.9	1.5987	0.88998	0.12481	0.69665	0.34629	0.72838
1.0	1.4388	0.91415	0.09045	0.73963	0.27883	0.65166
1.1	1.3080	0.93184	0.06692	0.77442	0.22692	0.58337
1.2	1.1990	0.94505	0.05045	0.80287	0.18664	0.52343
1.3	1.1068	0.95509	0.03869	0.82640	0.15506	0.47112
1.4	1.0277	0.96285	0.03013	0.84603	0.13005	0.42552
1.5	0.9592	0.96893	0.02380	0.86257	0.11004	0.38574
1.6	0.8993	0.97376	0.01993	0.87662	0.09386	0.35095
1.7	0.8464	0.97765	0.01539	0.88864	0.08065	0.32042
1.8	0.7994	0.98081	0.01258	0.89901	0.06978	0.29354
1.9	0.7573	0.98340	0.01037	0.90801	0.06076	0.26979
2.0	0.7194	0.98555	0.00863	0.91587	0.05321	0.24871
2.5	0.5755	0.99216	0.00383	0.94339	0.02950	0.17237
3.0	0.4796	0.99529	0.00194	0.95936	0.01799	0.12611
3.5	0.4111	0.99695	0.00109	0.96943	0.01175	0.09612
4.0	0.3597	0.99792	0.0 <sup>3</sup> 656	0.97618	0.00809	0.07564
5	0.2878	0.99890	0.0 <sup>3</sup> 279	0.98438	0.00430	0.05028
6	0.2398	0.99935	0.0 <sup>3</sup> 138	0.98898	0.00255	0.03580
7	0.2055	0.99959	0.0 <sup>4</sup> 758	0.99181	0.00164	0.02677
8	0.1799	0.99972	0.0 <sup>4</sup> 450	0.99368	0.00111	0.02077
9	0.1599	0.99980	0.0 <sup>4</sup> 284	0.99496	0.0 <sup>3</sup> 788	0.01658
10	0.1439	0.99985	0.0 <sup>4</sup> 188	0.99590	0.0 <sup>3</sup> 579	0.01354
15	0.0959	0.9 <sup>4</sup> 55	0.0 <sup>5</sup> 330	0.99815	0.0 <sup>3</sup> 176	0.00617
20	0.0719	0.9 <sup>4</sup> 80	0.0 <sup>5</sup> 122	0.99895	0.0 <sup>4</sup> 751	0.00351
30	0.0480	0.9 <sup>5</sup> 43	0.0 <sup>6</sup> 244	0.99953	0.0 <sup>4</sup> 225	0.00158
40	0.0360	0.9 <sup>5</sup> 75	0.0 <sup>7</sup> 776	0.99974	0.0 <sup>5</sup> 956	0.0 <sup>3</sup> 894
50	0.0288	0.9 <sup>5</sup> 88	0.0 <sup>7</sup> 319	0.99983	0.0 <sup>5</sup> 491	0.0 <sup>3</sup> 574
100	0.0144	0.9 <sup>6</sup> 85	0.0 <sup>8</sup> 201	0.99996	0.0 <sup>6</sup> 619	0.0 <sup>3</sup> 144
		small $x$ $1 - 0.0513 x^3$	$0.0472 x^4$	$1 - 0.208 x^2$	$0.2092 x^3$	$0.7035 x^2$

BL( 15)

PLANCKIAN: WAVE LENGTH SCALE.

[87-07-02]

T(3) = 5 TO 10 STEP 1



PLANCKIAN: WAVE LENGTH SCALE.

PLANCK.A1. VOL.30M (KOYAMA: 87.06.29)

[87/07/02]

TEMPERATURE (°K)	WAVELENGTH MAX (Angstrom)	EMITTANCE (erg/sec cm <sup>2</sup> )
10000	2898	5.66960 ( 11)
9000	3220	3.71982 ( 11)
8000	3622	2.32227 ( 11)
7000	4140	1.36127 ( 11)
6000	4830	7.34780 ( 10)
5000	5796	3.54350 ( 10)

The number in ( ) is the power of 10.

## 2. 2. ステファン-ボルツマンの法則 Stefan-Boltzmann's laws

全輻射強度はプランク強度 (1) を振動数  $\nu$  について  $(0, \infty)$  で積分したもので、プランク曲線内の面積に対応して、温度  $T$  とともに急増する。

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) d\nu \\ &= 2hc^{-2} \int_0^{\infty} \nu^3 \{\exp(h\nu/kT) - 1\}^{-1} d\nu \quad \rightarrow x = h\nu/kT \\ &= 2hc^{-2}(kT/h) \int_0^{\infty} x^3 \{\exp(x) - 1\}^{-1} dx \quad \int = \pi^4/15 \\ B &= (2\pi^4 k^4/15c^2 h^3) T^4 = (\sigma/\pi) T^4 \\ &= 1.80468 \times 10^{-5} T^4 \text{ erg/cm}^2 \text{ sec str} \end{aligned} \quad (6)$$

emittance  $\mathcal{E}^+$  は

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+ &= \pi B = \sigma T^4 \\ \sigma &= 2\pi^5 k^4/15c^2 h^3 = 5.6696 \times 10^{-5} \text{ erg/cm}^2 \text{ sec deg}^4 \end{aligned} \quad (7)$$

但し、 $\sigma$  は Stefan-Boltzmann constant と呼ばれる。温度  $T$  の空洞内の輻射密度  $u$  は

$$\begin{aligned} u &= (4\pi/c) B = (4\sigma/c) T^4 = a T^4 \\ a &= (4\sigma/c) = 8\pi^5 k^4/15c^3 h^3 \\ &= 7.56464 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ deg}^{-4} \end{aligned} \quad (8)$$

輻射圧  $p_r$  は

$$p_r = \frac{1}{3} u = \frac{1}{3} a T^4 \quad (9)$$

以上のように、全輻射の  $B$ ,  $\mathcal{E}^+$ ,  $u$ ,  $p_r$  などがみな  $T^4$  に比例して急増することが判る。これらの関係、特に、emittance  $\mathcal{E}^+$  の (7) 式をステファン-ボルツマン Stefan-Boltzmann の法則と言う。太陽や他の少数の星のように、半径  $R$  と全輻射量  $L$  が判っている場合 ( $L = 4\pi R^2 \cdot \mathcal{E}^+$ )、星を黒体と見なした時の emittance  $\mathcal{E}^+$  の目安として ( $\mathcal{E}^+ = \sigma T^4$ ) から温度  $T_{\text{eff}}$  を求め、それを有効温度と言う。

### ★ 参考

太陽常数から

$$\mathcal{E}^+ = 6.824 \times 10^{10} \text{ erg/cm}^2 \text{ sec}$$

(7) 式から

$$T_{\text{eff}} = 5770 \text{ K} \quad (\text{有効温度})$$

(8) 式：輻射エネルギー密度

太陽中心：	$T = 1.55 \times 10^7$ ;	$u = 4.37 \times 10^{14} \text{ erg/cm}^3$
室温	； $T = 300$ ;	$u = 6.13 \times 10^{-5} \text{ erg/cm}^3$

(9) 式：輻射圧

太陽中心：	$T = 1.55 \times 10^7$ ;	$p = 1.46 \times 10^{14} \text{ dyne/cm}^2$
太陽表面：	$T = 5770$ ;	$p = 2.79 \text{ dyne/cm}^2$
室温	； $T = 300$ ;	$p = 2.04 \times 10^{-5} \text{ dyne/cm}^2$

Table 4. Solar energy distribution. Wavelength  $\mu$  is in microns, the mean zero air mass spectral irradiance  $H_{\mu}$  is in watts  $\cdot$  cm $^{-2}$  micron $^{-1}$ , and  $P_{\mu}$  is the percentage of the solar constant associated with wavelengths shorter than wavelength  $\mu$ . These data are from E. S. JOHNSON: J. Meteorology 11, 431 (1954). Column 4 is the decade logarithm of the intensity of the continuous spectrum in the normal direction, after M. MINNAERT [5] but modified beyond  $\mu = 1.0$  (see text). Unit: erg  $\cdot$  cm $^{-2}$  sec $^{-1}$  per  $d\lambda = 1$  and solid angle  $d\omega = 1.0$ .

$\mu$	$H_{\mu}$	$P_{\mu}$	Log $I_{10}(\mu)$	$\mu$	$H_{\mu}$	$P_{\mu}$	Log $I_{10}(\mu)$	$\mu$	$H_{\mu}$	$P_{\mu}$	Log $I_{10}(\mu)$	$\mu$	$H_{\mu}$	$P_{\mu}$	Log $I_{10}(\mu)$	$\mu$	$H_{\mu}$	$P_{\mu}$	Log $I_{10}(\mu)$
0.225	0.0030	0.02		0.305	0.129	5.89		0.505	0.197	24.2		0.70	0.144	48.8	14.408	2.6	0.00445	96.90	
0.225	0.0042	0.03		0.37	0.133	6.36		0.51	0.196	24.9		0.71	0.141	49.8		2.7	0.00390	97.21	
0.23	0.0052	0.05		0.37	0.133	6.36	14.655	0.515	0.189	25.6		0.72	0.137	50.8		2.8	0.00343	97.47	
0.235	0.0054	0.07		0.375	0.132	6.84		0.52	0.187	26.3	14.600	0.73	0.134	51.8		2.9	0.00303	97.72	
0.24	0.0058	0.09		0.38	0.123	7.29	14.659	0.525	0.192	26.9		0.74	0.130	52.7		3.0	0.00268	97.90	
0.245	0.0064	0.11		0.285	0.115	7.72		0.53	0.195	27.6		0.75	0.127	53.7	14.350	3.1	0.00230	98.08	
0.25	0.0064	0.13		0.39	0.112	8.13		0.535	0.197	28.3		0.80	0.1127	57.9	14.290	3.2	0.00214	98.24	
0.255	0.010	0.16		0.395	0.129	8.54		0.54	0.198	29.0	14.580	0.85	0.1003	61.7	14.236	3.3	0.00191	98.39	
0.26	0.013	0.20		0.40	0.154	9.03	14.663	0.545	0.198	29.8		0.90	0.0895	65.1	14.182	3.4	0.00171	98.52	
0.265	0.020	0.27		0.405	0.188	9.65		0.55	0.195	30.5		0.95	0.0803	68.1	14.132	3.5	0.00153	98.63	
0.27	0.025	0.34		0.41	0.194	10.3		0.555	0.192	31.2		1.00	0.0725	70.9	14.082	3.6	0.00139	98.74	
0.275	0.022	0.43		0.415	0.192	11.0		0.56	0.190	31.8	14.560	1.1	0.0606	75.7	13.982	3.7	0.00125	98.83	
0.28	0.024	0.51		0.42	0.192	11.7	14.662	0.565	0.189	32.5		1.2	0.0501	79.6	13.888	3.8	0.00114	98.91	
0.285	0.034	0.62		0.425	0.189	12.4		0.57	0.187	33.2		1.3	0.0406	82.9	13.799	3.9	0.00103	98.99	
0.29	0.052	0.77		0.43	0.178	13.0		0.575	0.187	33.9		1.4	0.0328	85.5	13.713	4.0	0.00095	99.05	
0.295	0.063	0.98		0.435	0.182	13.7		0.58	0.187	34.5	14.540	1.45			13.675	4.1	0.00087	99.13	
0.30	0.061	1.23		0.44	0.203	14.4	14.656	0.585	0.185	35.2		1.5	0.0267	87.6	13.640	4.2	0.00080	99.18	
0.305	0.067	1.43		0.445	0.215	15.1		0.59	0.184	35.9		1.55			13.606	4.3	0.00073	99.23	
0.31	0.076	1.69		0.45	0.220	15.9		0.595	0.183	36.5		1.6	0.0220	89.4	13.572	4.4	0.00067	99.29	
0.315	0.082	1.97		0.455	0.219	16.7		0.60	0.181	37.2	14.520	1.65			13.532	4.5	0.00061	99.33	
0.32	0.085	2.26		0.46	0.216	17.5	14.646	0.61	0.177	38.4		1.7	0.0182	90.83	13.492	4.6	0.00056	99.38	
0.325	0.102	2.60	14.386	0.465	0.215	18.2		0.62	0.174	39.7	14.500	1.8	0.0152	92.03	13.398	4.7	0.00051	99.41	
0.33	0.115	3.02		0.47	0.217	19.0		0.63	0.170	40.9		1.9	0.01274	93.02	13.310	4.8	0.00048	99.45	
0.335	0.111	3.40		0.475	0.220	19.8		0.64	0.166	42.1	14.477	2.0	0.01079	93.87	13.228	4.9	0.00044	99.48	
0.34	0.111	3.80	14.450	0.48	0.216	20.6	14.636	0.65	0.162	43.3		2.1	0.00917	94.58	13.151	5.0	0.00042	99.51	
0.345	0.117	4.21		0.485	0.203	21.3		0.66	0.159	44.5	14.455	2.2	0.00785	95.20	13.075	6.0	0.00021	99.74	
0.35	0.118	4.63		0.49	0.199	22.0		0.67	0.155	45.6		2.3	0.00676	95.71	13.004	7.0	0.00012	99.86	
0.355	0.116	5.04		0.495	0.204	22.8		0.68	0.151	46.7	14.408	2.4	0.00585	96.18	12.932				
0.36	0.116	5.47	14.502	0.50	0.198	23.5	14.619	0.69	0.148	47.8		2.5	0.00509	96.57	12.865				

### 2. 3. ウィーンの変位法則 Wien's (displacement) law

プランク強度  $B_\lambda(T)$  の曲線群を見れば、温度  $T$  が高くなるにつれて、強度が極大になる波長  $\lambda_{\max}$  が短波長側へ移ることが判る。 $\lambda_{\max}$  を求めるには  $dB_\lambda(T)/d\lambda = 0$  を解いて

$$\lambda_{\max} \cdot T = 0.28979 \text{ cm deg} \quad (10)$$

が得られ、この  $\lambda_{\max}$  で  $B_\lambda(T)$ 、 $\mathcal{E}_\lambda = \pi B_\lambda(T)$  などが極大になる。対応する振動数  $\nu_{\max}$  は  $\nu_{\max} = c/\lambda_{\max}$  である。

ここで注意すべきことは、この  $\lambda_{\max}$  は曲線  $B_\nu(T)$  が極大になる振動数  $\nu_m$  に対応する波長  $\lambda_m$  に等しくないことである。 $B_\nu(T)$ 、 $\mathcal{E}_\nu = \pi B_\nu(T)$  が極大になる振動数  $\nu_m$ 、それに対応する波長  $\lambda_m (= c/\nu_m)$  は

$$\lambda_m \cdot T = (c/\nu_m) \cdot T = 0.50996 \text{ cm deg} \quad (10')$$

である。

ウィーンの変位法則によって、連続放射を全体として見た時に、温度によって星の色がどのように変るかが理解できる。高温星ではエネルギー放出の極大波長は短く、青白い光となり、低温星では逆に赤く見える。

極大となる流量  $F_{\text{flux}}$  はそれぞれのスケールで

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\lambda_{\max}} &= 21.20144 c_1 (T/c_2)^5 \\ &= 1.2865 \times 10^{-4} T^5 \text{ erg/cm}^3 \text{ sec deg}^5 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\nu_m} &= 1.421436 (c_1/c) (T/c_2)^3 \\ &= 5.9561 \times 10^{-16} T^3 \text{ erg/cm}^2 \text{ deg}^3 \end{aligned} \quad (11')$$

#### ★ 参考

(10)式から強度  $B_\lambda(T)$  が極大になる波長  $\lambda_{\max}$  は

太陽中心：  $T = 1.55 \times 10^7$  ;  $\lambda_{\max} = 1.87 \times 10^{-8} \text{ cm}$  (X線)

太陽表面：  $T = 5770$  ;  $\lambda_{\max} = 5.02 \times 10^{-5} \text{ cm}$  (可視)

室温 :  $T = 300$  ;  $\lambda_{\max} = 9.66 \times 10^{-4} \text{ cm} \sim 10 \mu$  (赤外)

太陽エネルギーの分布の観測から

$$\lambda_{\max} = 4.75 \times 10^{-5} \text{ cm} ; T = 6100 \text{ K}$$

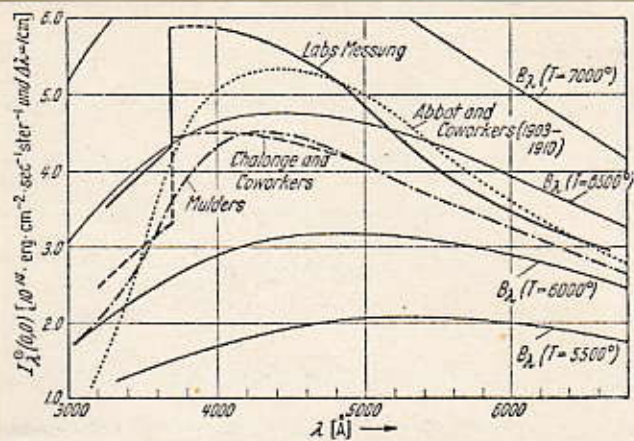
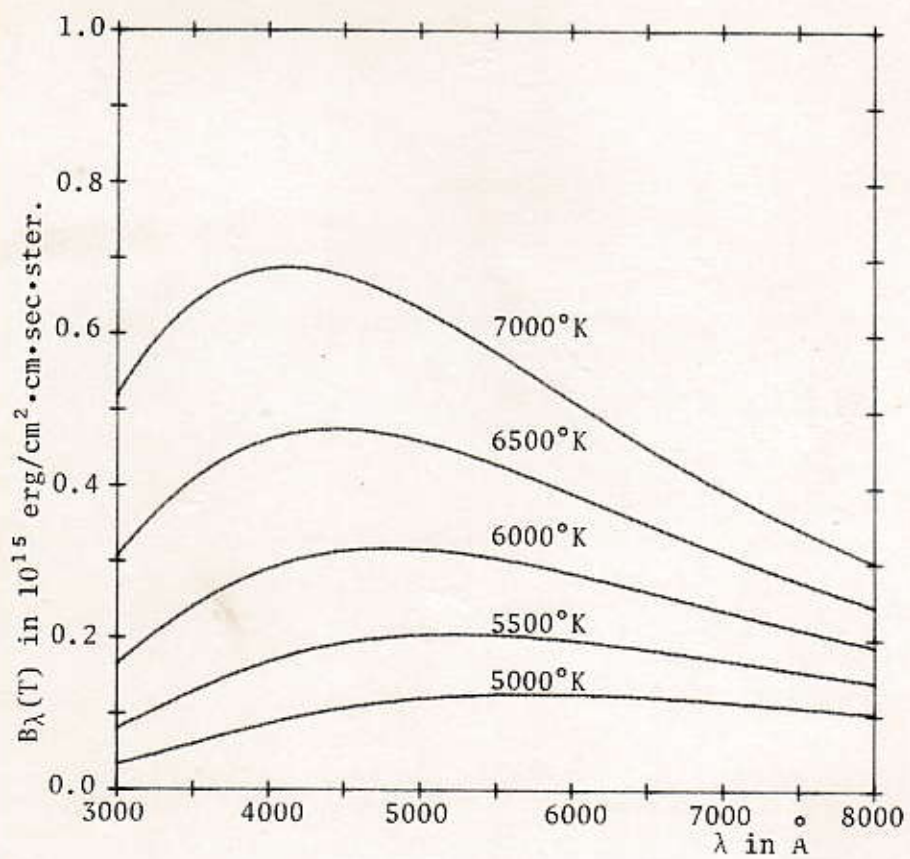


Fig. 6. LANS' measures of the continuum, obtained at the Pic-du-Midi, compared with the results of ABBOT, CHALONGE and MULDRERS (after LANS).



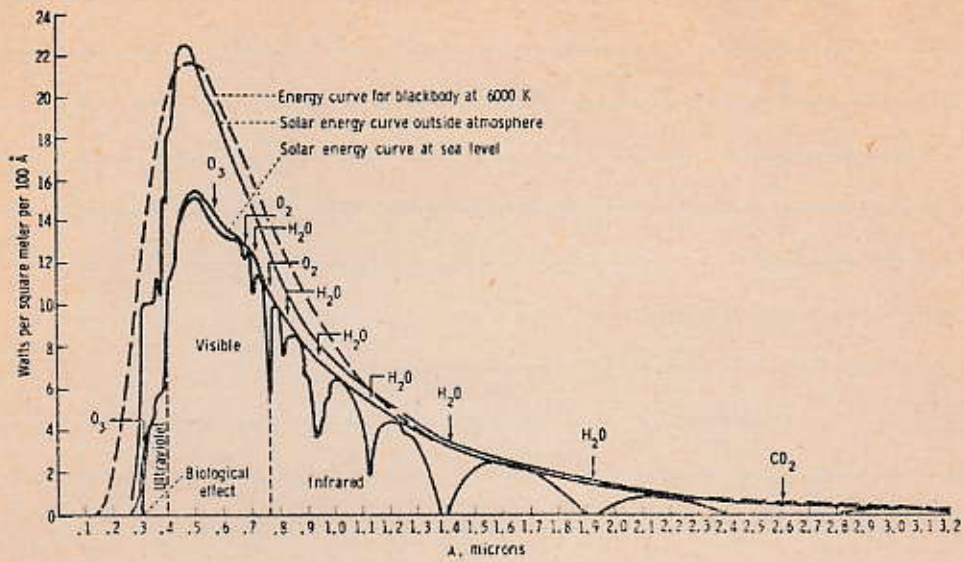
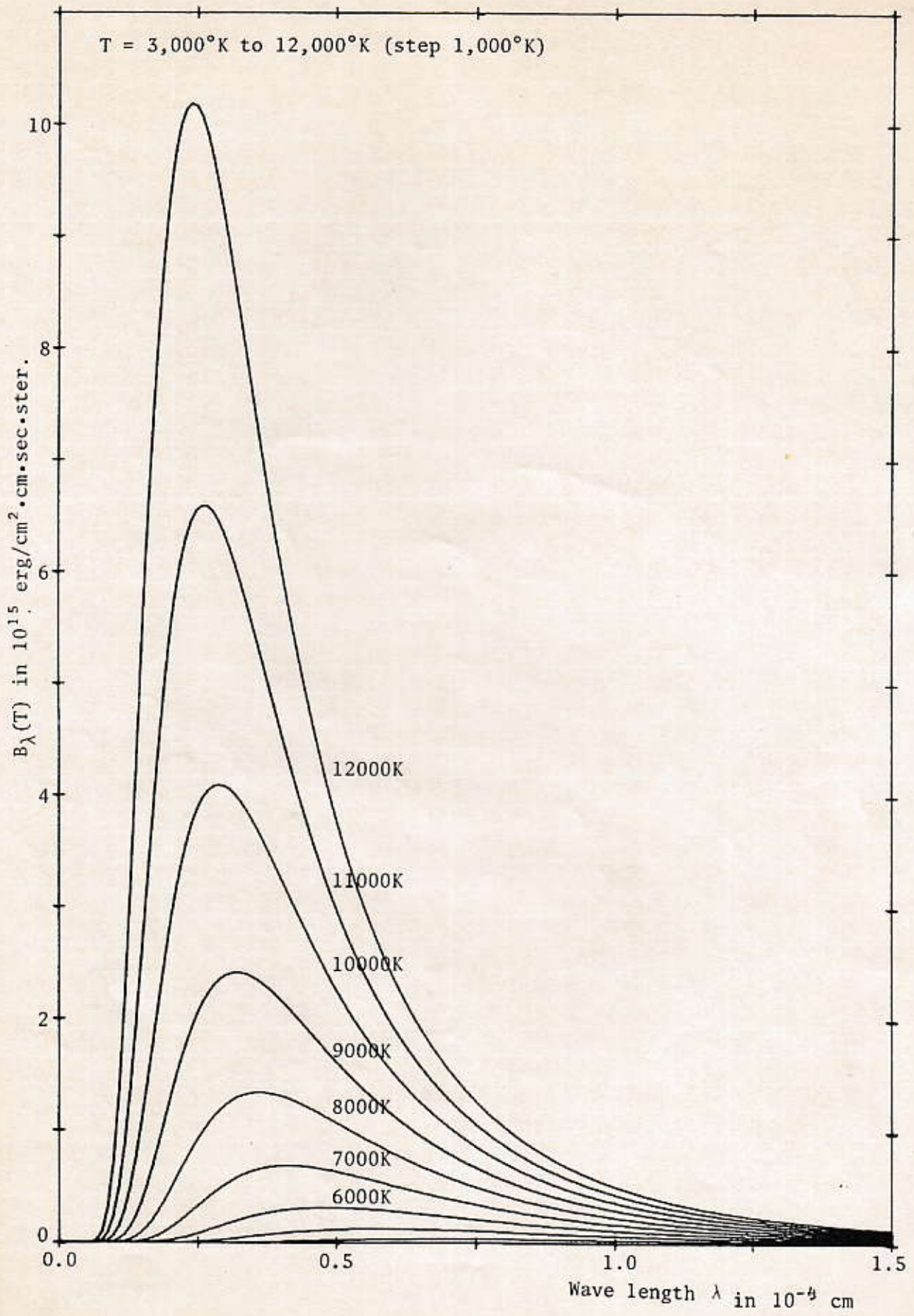
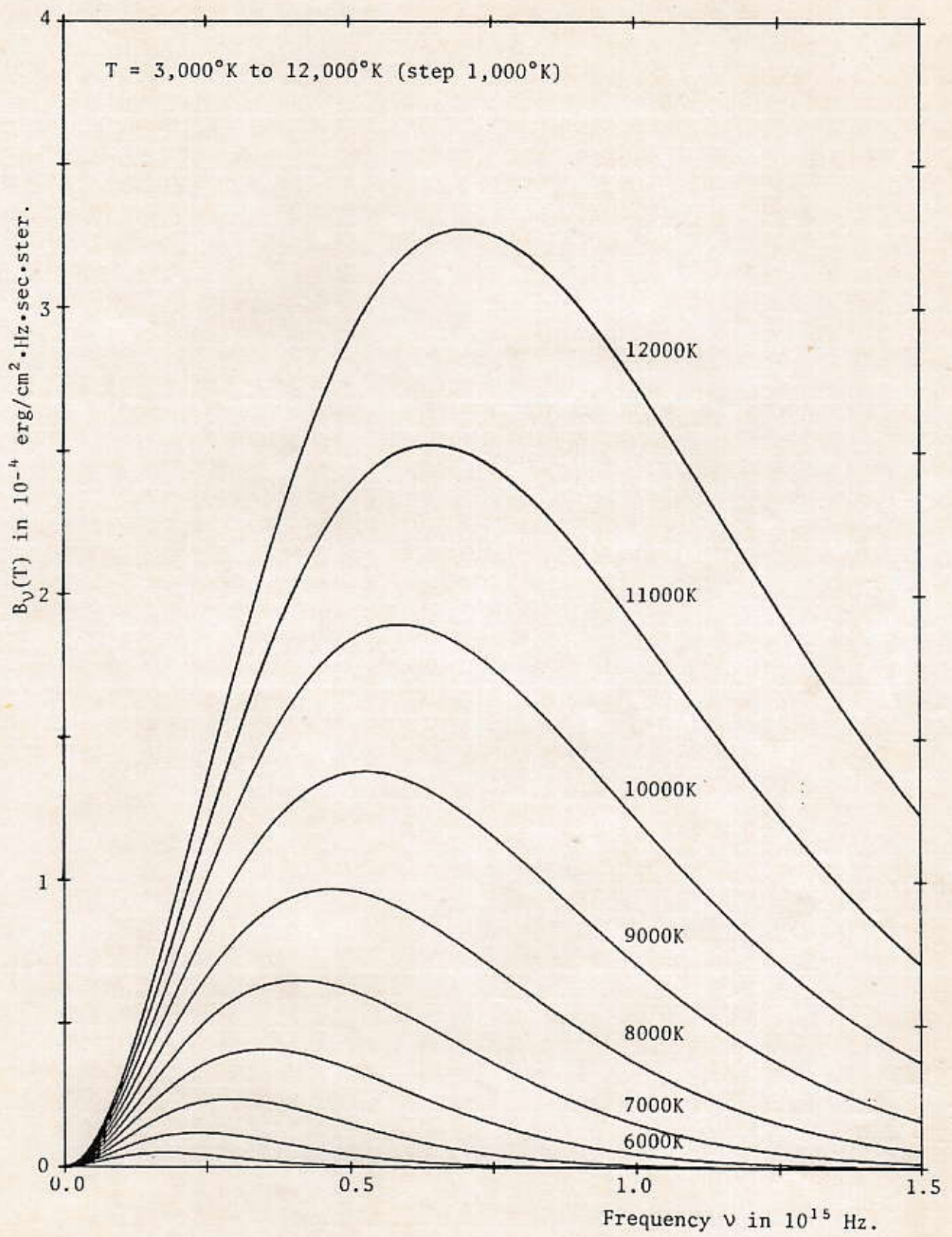


FIGURE 2-5.—Solar energy at the earth's orbit and the attenuation by the earth's atmosphere (From Hynek, 1951; used with permission of McGraw-Hill Book Co.)







## 2. 4. プランク関数の漸近形 *Asymptotic forms to the Planckian*

### 1. レイリー・ジーンズの分布 *Rayleigh-Jeans' distribution*

(スペクトルの赤端部)

プランク強度の両翼部では簡単な漸近式が用いられる。高温星の赤、赤外、電波スペクトルなどの場合は

$$h\nu/kT = hc/\lambda kT \ll 1 \quad \text{for } \nu \ll 10^{10} T$$

となり、この時、輻射強度は簡単に

$$\begin{aligned} B_\nu(T) &= 2c^{-2}kT\nu^2 = 2kT\lambda^{-2}, & \mathcal{F}_\nu &= \pi B_\nu(T) \\ B_\lambda(T) &= 2ckT\lambda^{-4}, & \mathcal{F}_\lambda &= \pi B_\lambda(T) \end{aligned} \quad (11)$$

と書くことができる。

### 2. ウィーン分布 *wien's distribution* (スペクトルの紫端部)

逆に紫外、X線領域では波長が短く

$$h\nu/kT = hc/\lambda kT \gg 1 \quad \text{for } \nu \gg 10^{10} T$$

となって、この時

$$\begin{aligned} B_\nu(T) &= 2hc^{-2}\nu^3 \exp(-h\nu/kT), & \mathcal{F}_\nu &= \pi B_\nu(T) \\ B_\lambda(T) &= 2hc^2\lambda^{-5} \exp(-hc/\lambda kT), & \mathcal{F}_\lambda &= \pi B_\lambda(T) \end{aligned} \quad (12)$$

と書くことができる。

### § 3. 輻射の減光と放出 Extinction and emission of radiation

#### 3. 1. 減光; (真の) 吸収と散乱 (True) absorption and scattering

これまで輻射場の性質を調べてきたが、星の大気中を輻射が流れ、星のスペクトルに吸収線や輝線ができるのは、大気物質と輻射の相互作用、即ち、ガス粒子による輻射の吸収、再放出、あるいは散乱などによる。ここでは、これらの過程をマクロ的な macroscopic 係数で表わそう。

このために、我々は、ここでは輻射場のエネルギーと大気物質のエネルギーとの間に相互変換が起こるか否かの観点で、真の吸収 absorption と散乱 scattering に分類する。この両者では大気物質と輻射場の相互作用が全く異なってくる。

#### 1. 吸収 Absorption

ここで用いる吸収過程という定義は、光子がガス粒子と相互作用をし、光子のエネルギーの少なくとも一部はガス粒子の熱運動エネルギー（大気の温度）に変換され、吸収された光子は全く再生されないか、或いはその振動数が著しく変えられてしまう（光子が壊されてしまう）。従ってこの過程は、その点における物質の熱力学的性質に影響を与える。吸収の逆過程、即ち、ガス粒子の熱運動エネルギーが輻射に変換する熱的放出 Thermal emission は、ガスの熱的性質と輻射場とを直接結び付ける。

吸収の例、[] 内はその逆過程

#### (a). 束縛-自由遷移 Bound-free transition

光電電離 Photoelectric ionization

[輻射的再結合 Radiative recombination]

#### (b). 自由-自由遷移 Free-free transition

自由-自由吸収 Free-free absorption

[制動輻射 Bremsstrahlung]

#### (c). 衝突逆励起 Collisional de-excitation

光電励起に続く非弾性衝突逆励起 Inelastic-collisional deexcitation

[超弾性衝突励起 Superelastic-collisional excit. に続く光電逆励起]

#### (d). 衝突電離 Collisional ionization

光電励起に続く衝突電離 Collisional ionization

[衝突再結合 Collisional recombination に続く光電逆励起]

## 2. 散乱 Scattering

ここで定義する散乱過程とは、光子がガス粒子と相互作用をし、光子の振動数の変化は無いが、あってもごく僅かで、今までと異なる方向へ放出されることであり、この過程では、光子のエネルギーがガス粒子の熱運動エネルギー（大気の温度）に変換されることはない（光子は壊れない）場合のことを言う。この過程は主にその点の輻射場に依存し、局部的温度のようなガス粒子の熱力学的性質との関連は弱い。

散乱の例、[]内はその逆過程

(a). 束縛-束縛遷移 Bound-bound transition

光電励起と、それに続く光電逆励起

(b). 自由電子によるトムソン散乱 Thomson scattering by free electron

(c). 分子によるレイリー・ジーンズ散乱 Rayleigh-Jeans scattering

(a).の場合、普通は原子による『吸収と、それに続く再放出』と言う言葉が使われえるが、ここでは『吸収』された光子のエネルギーがガス粒子の熱運動エネルギーに影響しないと言う意味で、吸収と呼ばずに散乱過程に含めた。

原子は有限な幅の励起準位を持っており、また単独でなくプラズマ中の1原子だから、放出されて出てくる光子は、始めの光子とエネルギー、従って振動数が厳密には等しくない（non-coherent散乱）。基底準位だけは幅を持たないので、共鳴線は光子の振動数を変化させない（coherent散乱、resonance 散乱）。

### 3. 2. 減光係数 Extinction coefficient

#### 1. 吸収係数 Absorption coefficient

星の物質 1 g 当りの吸収係数  $\kappa_\nu$  を定義しよう。気体に入射した強度  $I_\nu^0$  の輻射を考える。このエネルギーの中、一部は気体に吸収され、一部は通過して行く。今、気体内のある点  $s$  において、強度  $I_\nu$  の輻射光束が、面積  $d\sigma$ 、長さ  $ds$ 、密度  $\rho$  の気体シリンダーを垂直に通過する時、吸収を受けて強度が  $I_\nu$  から  $I_\nu + dI_\nu$  に変化したとする。吸収されたエネルギー量は次のように書くことができる、

$$dI_\nu d\sigma d\nu d\omega dt = -\kappa_\nu I_\nu d\nu d\omega dt (\rho d\sigma ds) \quad (1)$$

従って

$$dI_\nu = -\kappa_\nu I_\nu \rho ds$$

この  $\kappa_\nu$  は  $\text{cm}^2/\text{g}$  の単位を持っており、この物質の  $\nu$  輻射に対する質量吸収係数 mass absorption coefficient と言う。ここで

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho ds$$

$$\tau_\nu = \int_0^s \kappa_\nu \rho ds \quad (2)$$

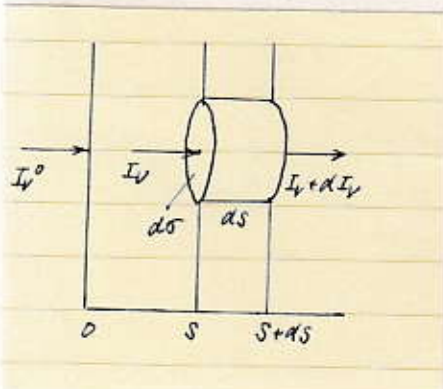
と置けば、(1)式は

$$dI_\nu = -I_\nu d\tau_\nu, \quad dI_\nu / I_\nu = -d\tau_\nu$$

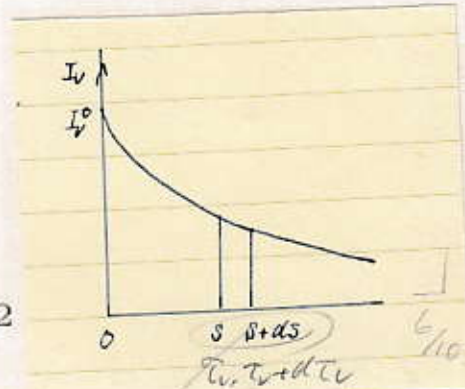
となり、初期条件 ( $s = 0$ 、従って  $\tau_\nu = 0$  において、 $I_\nu = I_\nu^0$ ) を用いて、これを 0 から  $s$  まで積分すれば

$$I_\nu = I_\nu^0 \exp(-\tau_\nu) \quad (3)$$

(3) 式は、輻射が物質層を通過する時、その強度が (物質の質量吸収係数  $\kappa_\nu$ 、密度  $\rho$ 、幾何学的距離  $s$  によって決る)  $\tau_\nu$  の増加とともに、指数関数的に減少することを示している。幾何学的距離  $s$  に対して  $\tau_\nu$  を光学的距離 optical distance と呼ぶ。 $\tau_\nu = 1$  に対して輻射強度は  $1/e = 0.368$  倍に減少する。



22



6/10

## 2. 散乱係数 scattering coefficient

全く同様に、質量散乱係数  $\sigma_\nu$  を定義する。上と同様の状況で光束から散乱される量を

$$dI_\nu d\sigma d\nu d\omega dt = -\sigma_\nu I_\nu d\nu d\omega dt (\rho d\sigma ds) \quad (4)$$

即ち

$$dI_\nu = -\sigma_\nu I_\nu \rho ds = -I_\nu d\tau_\nu$$

$$d\tau_\nu = \sigma_\nu \rho ds$$

この  $\sigma_\nu$  も  $\text{cm}^2/\text{g}$  の単位を持っており、この物質の  $\nu$  輻射に対する質量散乱係数 mass scattering coefficient と言う。

一般に、 $\kappa_\nu$  も  $\sigma_\nu$  も、等方的で角度変数に依存しないと考えてよい。光束から吸収と散乱の両方でエネルギーが奪われる時、その効果は  $k_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$  で表わせる。 $k_\nu$  は全減光係数 total extinction coefficient、或いは簡単に、不透明度 opacity と言う。 $k_\nu$  の値の  $\nu$  への依存性を求めるには、個々の吸収過程、散乱過程を micro的に考えなければならない。

### 3. 3. 放出係数 Emission coefficient

次に、物質から輻射場へのエネルギーの放出を考えよう。質量要素  $dm = \rho d\sigma ds$  から立体角  $d\omega$  内の光束に戻される全エネルギーが  $dE_\nu$  である時、

$$dE_\nu = j_\nu d\nu d\omega dt (\rho d\sigma ds) \quad (5)$$

と書き、 $j_\nu$  を質量放出係数 Mass emission coefficient (或いは簡単に放出能 Emissivity) と言う。前の議論から、これは熱的項と散乱項とからなり、

$$j_\nu = j_\nu^t + j_\nu^s \quad (6)$$

#### 1. 熱的放出 Thermal emission

若し、輻射を完全に吸収したり、放出したりする壁を持つ、一定温度  $T$  の容器に入れられている物質が、その輻射場と平衡状態にあれば [プランクの輻射場、 $I_\nu = B_\nu(T)$ ]、吸収量と放出量が等しいと言う条件

$j_\nu^t d\nu d\omega dt (\rho d\sigma ds) = \kappa_\nu B_\nu(T) d\nu d\omega dt (\rho d\sigma ds)$   
から

$$j_\nu^t = \kappa_\nu B_\nu(T) \quad (7)$$

が得られる。プランク関数は、厳密な熱力学的平衡 (TE) の場合の、光子の分布を表わしている。この (7) の関係はキルヒホッフ-プランクの法則と呼ばれるが、熱的な吸収、放出は何れも等方的であることに注意しよう。

これは熱的な放出だけに当はまるもので、例えば、空気分子による日光のレイリー散乱、コロナの自由電子によるトムソン散乱などには当はまらない。他方、連続スペクトルに関する過程や、ある場合の吸収線の形成にはほぼ当はまる。

この法則は、定性的には良い吸収体は良い放出体であり、熱せられた物質が、その吸収係数の大きい波長 (振動数) で放出すると言う、スペクトル分析におけるキルヒホッフの第三法則を表わしている。



## 2. 散乱放出 Scattering emission

散乱過程で放出される photon は一般的に、振動数  $\nu$  と方向  $\mathbf{n}$  の両方が変化する  
場合が起こり得る。この問題は最初  $d\omega', (\nu', \nu' + d\nu')$  であった photon  
が  $d\omega, (\nu, \nu + d\nu)$  へ散乱される確率を与える再分布関数 redistribution function  
を用いて表せる。

$$R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) d\nu' d\nu (d\omega'/4\pi) (d\omega/4\pi) \quad (8)$$

この関数によって  $d\omega, (\nu, \nu + d\nu)$  内に放出されて出てくるエネルギーは

$$\begin{aligned} j_\nu &= d\nu d\omega dt (\rho d\sigma ds) \\ &= \sigma_\nu d\nu d\omega dt (\rho d\sigma ds) \\ &\times \oint I_{\nu'}(\mathbf{n}') R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) d\nu' (d\omega'/4\pi) \end{aligned} \quad (9)$$

### ★ coherent 散乱

特別な散乱として、入った photon と出てくる photon とが一恐らく方向  $\mathbf{n}$  の再  
分布は起こるが振動数  $\nu$  が変化しない coherent 散乱 を考える。この時、

$$R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) = g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) \phi(\nu') \delta(\nu - \nu') \quad (\text{coherent}) \quad (10)$$

と書くことができる。  $g$  は位相関数 phase function であり、  $\delta$  は Dirac 関数であ  
る。この時出てくるエネルギーは

$$\begin{aligned} j_\nu &= d\nu d\omega dt (\rho d\sigma ds) \\ &= \sigma_\nu d\nu d\omega dt (\rho d\sigma ds) \\ &\times \oint I_{\nu'}(\mathbf{n}') g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) (d\omega'/4\pi) \end{aligned} \quad (11)$$

である。

### ★ coherent and isotropic 散乱

更に特別な、coherent で等方的散乱の場合。等方的だから位相関数は

$$g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = 1 \quad (\text{isotropic}) \quad (12)$$

となり、エネルギーは

$$\begin{aligned} j_\nu &= d\nu d\omega dt (\rho d\sigma ds) \\ &= \sigma_\nu J_\nu d\nu d\omega dt (\rho d\sigma ds) \end{aligned} \quad (13)$$

となり、従って

$$\boxed{j_\nu = \sigma_\nu J_\nu} \quad (\text{coherent, isotropic}) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int \delta(x) dx &= 1, & \delta(-x) &= \delta(x), & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1 \\ \int f(x) \delta(x) dx &= f(0), & \int_a^b f(x) \delta(x-c) dx &= \begin{cases} f(c) & a < c < b \\ 0 & (c \leq a \text{ or } c \geq b) \end{cases} \end{aligned}$$

★ Normalization:

$$\oint \oint \int_0^\infty \int_0^\infty R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) d\nu' d\nu (d\omega'/4\pi) (d\omega/4\pi) = 1$$

★ Scattering profile:

$$\phi(\nu') d\nu'$$

$$= d\nu' \oint \oint \int_0^\infty R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) d\nu (d\omega'/4\pi) (d\omega/4\pi)$$

$$\int_0^\infty \phi(\nu') d\nu' = 1$$

$$\sigma_{\nu'} = \sigma \phi(\nu')$$

★ Emission profile:

$$\psi(\nu) d\nu$$

$$= d\nu \oint \oint \int_0^\infty R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) d\nu' (d\omega'/4\pi) (d\omega/4\pi)$$

$$\int_0^\infty \psi(\nu) d\nu = 1$$

★ Angular phase function:

$$\oint g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) (d\omega'/4\pi) = 1$$

#### § 4. 局所熱力学的平衡 Local thermodynamical equilibrium

前節で完全吸収、放出をする空洞内では厳密な熱力学的平衡 (TE) が成立ち、放出係数  $j_\nu$  と吸収係数  $\kappa_\nu$  との比が等方的な Planckian になること

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T) \quad (\text{Kirchhoff's law}) \quad (1)$$

を求めておいた。

しかし、現実の星の大気中の状況を見れば、(1) 式を導いた仮定は何一つ満たされてはおらず、この関係が一般的に成り立つことを期待できないことが判る。

① 星の表面から真空の空間へ実際的に輻射が放出されている事実は輻射エネルギーの流れ、従って大気中に温度傾斜があることを意味している。元来温度という概念は TE にある物理的な閉じた系全体について、その状態を一意的に表すパラメーターであって、温度傾斜という言葉自体厳密には無意味である。厳密な TE からは輻射の流れに関する概念は何一つ導けない。

② 星のごく表面近くでは極端に非等方的な輻射場を知っている。

③ 大気物質の不透明度  $\kappa_\nu$  は振動数  $\nu$  により著しく異なるので、異なる振動数での放出輻射は、大気中の、物理性質の非常に異なる種々の深さに起因する。放出輻射が、振動数によってそれぞれ起因する決った深さの温度を何等かの意味で反映しており、そして上記の温度傾斜があるとすれば、表面から出る輻射は、性質の非常に異なる大気中の各点からの寄与の superpose であろうから、当然ある温度の Planckian である筈がない。

それにも拘わらず、我々はしばしば、大気中の各点における小体積内の、物質と輻射との熱力学的性質 (例えば、原子の存在数、不透明度、エネルギー放出など) が、その点に固有な局所的な温度 T に対する TE 値に等しいという仮定をとる。これを『局所熱力学的平衡』(LTE) 近似という。

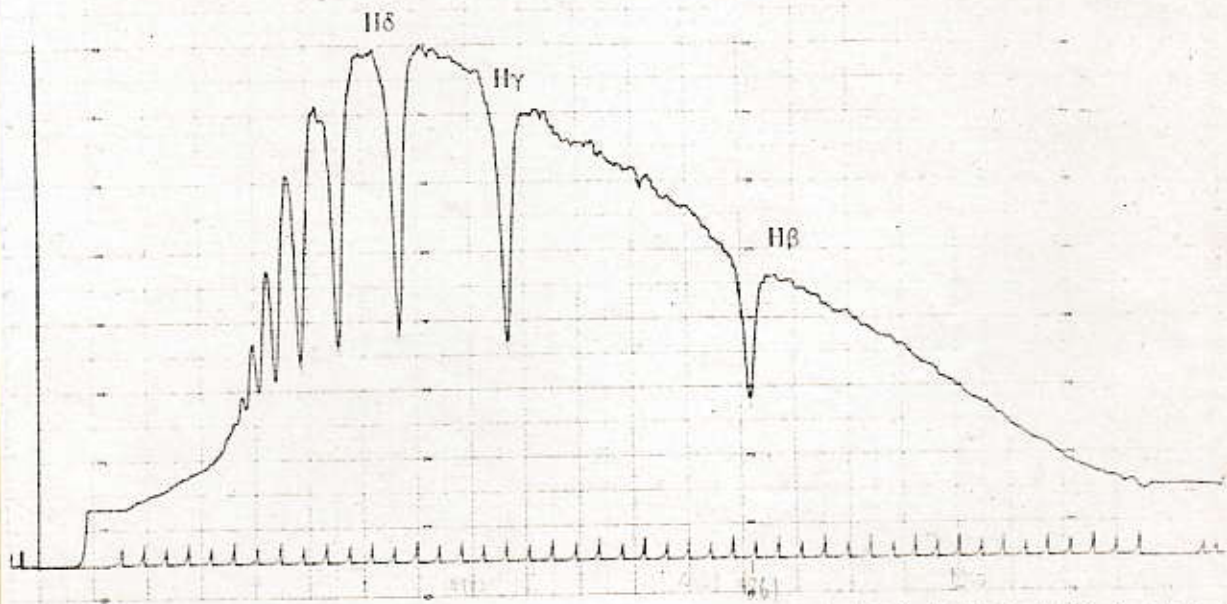
太陽光球内の各点は、少なくとも逐次近似的な意味で、ある温度 T で表せる TE 状態にごく近く、少し離れた 2 点間では (輻射量そのものの大きさに比べて) 輻射の出入りはごく少なく、近似的には局所的な空洞、局所熱力学的平衡を仮定し、温度傾斜を考えることができる。すなわち、LTE を仮定することによって初めて我々の目的とする大気中の輻射の定常流にまで熱力学を拡張することができる。

しかし、LTE は計算を簡便にする便宜上のもので、精確な近似では有り得ないこと、そして最後には、大気物質と輻射場との総合された熱力学的状態を決定しなければならないことに留意すべきである。

No.

CHART NO. 112-1

$\alpha$  Lyr (Vega) : A0 V



§ 5. 輻射輸達の方程式 The equation of radiative transfer

5. 1. 源泉関数 The source function

さて、輻射輸達の問題を考える。星の大気中に、密度  $\rho$  の物質を含む長さ  $ds$ 、垂直断面積  $d\sigma$  の微小体積要素を考え、この物質の opacity を  $k_\nu$ 、emissivity を  $j_\nu$  とする。この要素を通過した輻射光束のエネルギー変化は、この要素によって放出されたエネルギーから、吸収されたエネルギーを差し引いた値、

$$dI_\nu d\sigma d\nu d\omega dt = j_\nu (\rho d\sigma ds) d\nu d\omega dt - k_\nu I_\nu (\rho d\sigma ds) d\nu d\omega dt \quad (1)$$

従って

$$dI_\nu / ds = -\rho (k_\nu I_\nu - j_\nu) \quad (2)$$

ここで平行平面 plane-parallel の幾何学  $dz = \mu ds$  を用い、また幾何学的距離  $z$  の代りに光学的深さ

$$d\tau_\nu = -\rho k_\nu dz \quad (3)$$

を導入する。これは前記のように、輻射光束に沿っての物質の吸収能の直接的な目安になるため、輻射場の記述には幾何学的距離よりも基本的である。 $\tau_\nu$  と  $z$  との変換は、例えば、両方とも大気表面に原点をとれば、

$$\tau_\nu = -\int_0^z k_\nu \rho dz = \int_z^\infty k_\nu \rho dz \quad (4)$$

で得られる。

opacity  $k_\nu$  に対する emissivity  $j_\nu$  の比を源泉関数 source function と定義する。

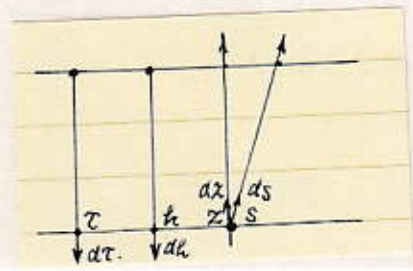
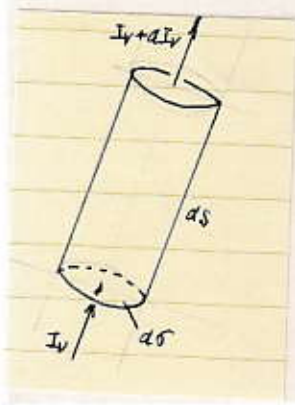
$$S_\nu = j_\nu / k_\nu \quad (5)$$

一般に、 $j_\nu$ 、 $k_\nu$  はともに等方的であるため  $S_\nu$  は等方的であり、 $\mu$  に依存しない。従って、(2) 式は標準的な輸達方程式

$$\mu dI_\nu (\tau_\nu, \mu) / d\tau_\nu = I_\nu (\tau_\nu, \mu) - S_\nu (\tau_\nu) \quad (6)$$

となる。

この式で  $k_\nu$  は全減光係数で、若し吸収  $\kappa_\nu$  と、散乱  $\sigma_\nu$  との両方があれば、 $k_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$  である。(更に吸収線内の振動数  $\nu$  を考える時は、線吸収係数  $l_\nu$  を加え、 $k_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu + l_\nu$  となる。)



放出過程が局所熱力学的平衡の熱的放出項と一般的な散乱放出項を含んでいれば、全放出係数  $j_\nu$  は、形式的に

$$j_\nu = j_\nu^{\text{th}} + j_\nu^{\text{sc}} \\ = \kappa_\nu B_\nu + \sigma_\nu \oint I_\nu \cdot (\mathbf{n}') R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) d\nu' (d\omega'/4\pi) \quad (7)$$

と書けるので、源泉関数  $S_\nu$  は

$$S_\nu = \kappa_\nu B_\nu / (\kappa_\nu + \sigma_\nu) \\ + (\sigma_\nu / (\kappa_\nu + \sigma_\nu)) \\ \times \oint I_\nu \cdot (\mathbf{n}') R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) d\nu' (d\omega'/4\pi) \quad (8)$$

である。

★ LTE 熱的放出と coherent 等方散乱がある時

$$S_\nu = \kappa_\nu B_\nu / (\kappa_\nu + \sigma_\nu) + \sigma_\nu J_\nu / (\kappa_\nu + \sigma_\nu) \quad (10)$$

★ 厳密な LTE で、散乱のない場合、 $\kappa_\nu = \kappa_\nu$  であり、

$$S_\nu = B_\nu$$

★ 純粹な coherent 等方散乱だけの場合、 $\kappa_\nu = \sigma_\nu$  であり、

$$S_\nu = J_\nu$$

である。