

§5. スペクトル線の熱的増幅 Thermal broadening of spectral lines

輻射原子がマクスウェルの速度分布に従って熱運動をしているため、スペクトル線は増幅される。ここではこの原因以外の増幅を考えず、個々の原子は単色輻射をしていると考える。すなわち静止している原子は、振動数 ν_0 （従って波長 $\lambda_0 = c/\nu_0$ ）のシャープな線を輻射すると考える。若し原子がこちらに向かって v_x の速度で運動していれば、この原子が放出する輻射の振動数や波長はドブラー効果Doppler effectにより

$$\Delta \nu / \nu = \Delta \lambda / \lambda = v_x / c \quad (1)$$

だけ変化する。ある時刻に、このような原子の数はマクスウェルの法則(4,1)で得られる。若し、スペクトル線内の強度分布が振動数 ν を輻射する原子の数に比例するとすれば(4,1)式から

$$I(\nu) d\nu = (I_0 / \pi^{1/2}) \exp[-\{c(\nu - \nu_0) / \alpha \nu\}^2] c d\nu / \alpha \nu \quad (2)$$

が得られる。何故なら

$$(v_x/c)^2 = \{(\nu - \nu_0) / \nu\}^2, \quad dv_x = cd(\Delta \nu) / \nu = cd\nu / \nu \quad (3)$$

だからである。同様に波長単位で表わせば

$$I(\lambda) d\lambda = (I_0 / \pi^{1/2}) \exp[-\{c(\lambda - \lambda_0) / \alpha \lambda\}^2] c d\lambda / \alpha \lambda \quad (4)$$

ここで I_0 は線の全強度total intensityで中心強度 I_c との関係は

$$I_c = c I_0 / \lambda \alpha \pi^{1/2} \quad (5)$$

で示される。(4)式から、スペクトル線はほぼベル型の輪郭を持つことが判る。頂部は丸みを帯び、両側へ急に下降する。若し、このようなスペクトル線をコントラストの強い乾板に写すと、かなりはっきりした幅を持つ広がった線を得るだろう。われわれは線の半値幅half widthとして、 I が最大値 I_c の $\frac{1}{2}$ に落ちる部分の幅を定義する。 $I = \frac{1}{2} I_c$ となる波長 λ は

$$\exp[-\{Mc^2(\lambda - \lambda_0)^2 / 2\lambda_0^2 kT\}] = \frac{1}{2} \quad (6)$$

で与えられ、全半値幅 $\delta \lambda_a$ は

$$\delta \lambda_a = 2 \delta \lambda = 2(\lambda - \lambda_0) = 2(2\lambda_0^2 kT / Mc^2) \cdot \log_e 2 \quad (7)$$

従って、

$$\delta \lambda_a = 7.16 \times 10^{-7} \lambda (T/\mu)^{1/2} \quad (\lambda \text{ in } \text{Å}) \quad (8)$$

である。 μ は分子量であり、 T は $^{\circ}\text{K}$ で、 λ は Å で測られる。

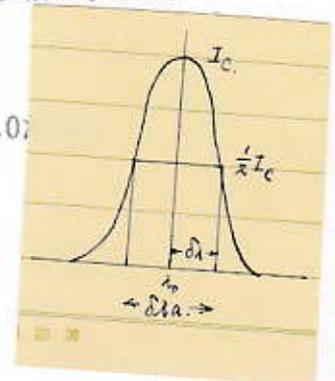
例： 温度 $10,000^{\circ}\text{K}$ のガス状星雲内の水素線 $\text{H I } \lambda 4861$ の半値幅を求める。線は熱運動のドブラー効果だけで増幅すると仮定する。

$$\delta \lambda_a = 7.16 \times 10^{-7} \times 4861 \times (10,000/1)^{1/2} = 0.35 \text{ Å}$$

酸素イオンの禁制線 $[\text{O III}] \lambda 4960, \lambda 5007$ 線では、 $\mu = 16.0$

$$\delta \lambda_a = 0.087 \text{ Å}$$

に過ぎない。



§ 6. 種々の条件での速度分布法則

統計力学で導かれたマクスウェルの速度分布法則は厳密には熱力学的平衡の条件が満たされた状態で成り立つ法則である。しかし、この速度分布法則は最も根強い自然現象の一つである。他の平衡法則が成立たなくなる極端な種々の条件のもとでも、原子、イオン、電子などが、ある温度 T に対応するマクスウェル分布をしていることがある。この場合、われわれは、この温度 T をその気体の運動温度 *kinetic temperature* と呼ぶ。ガス状星雲や太陽コロナのように極端な条件でも電子はある温度 T のマクスウェル分布をしている。

マクスウェル分布を破ろうとする過程と、それを保とうとする過程とが競合している。惑星状星雲内では、電子は光電電離により原子から脱出して飛び廻るが、最後にはまたイオンに再捕獲される。自由電子としての寿命中に、それは酸素原子などと非弾性衝突して、そのエネルギーは原子を励起するのに奪われてしまう。このような衝突励起はマクスウェル分布を破ろうとする傾向を持つが、他方、別の電子はイオンとの衝突で、マクスウェル分布を保とうとする傾向を持つ。電子-電子衝突および電子-イオン衝突は、他のどんな過程よりもずっと頻繁に起る。このためマクスウェル分布からのずれは微小である。各種の粒子は、自分の速度分布を持とうとするが、異なる粒子は相互にも衝突しようとするから、速度分布はある一つの運動温度 T に対応するものになって行くのである。

§ 7. 理想気体法則の破綻 Breakdown of ideal gas law

普通の星の内部構造を議論する時、理想気体の状態方程式(1.3)が妥当な第一近似として仮定される。しかし、平均密度が $10^5 \sim 10^8 \text{ gm/cm}^3$ に達する白色矮星を考える場合には、この仮定が崩れる。

理想気体の法則は、実際の衝突時間以外には互いに力を及ぼさない質点粒子を前提としている。従って、若し粒子間の相互距離が粒子自体の大きさに匹敵するほど気体が圧縮されると、

1. 粒子自体の有限な大きさ
2. 帯電粒子間の静電的な引力・反発力
3. ファンデアワールス Van der Waals の短距離力

などのため、理想気体の法則が成り立たなくなる。この臨界点以下では、圧力が増せば気体は液化してしまう。

逆に温度が十分高く、圧力が減れば、どんな気体も理想気体になる。大抵の星の大気や内部では、密度が十分低いか、或いは温度が十分高く理想気体の法則がほぼ正確に成り立つ。

1.

原子核や電子の半径は 10^{-13} cm (=1 Fermi) 程度の小ささだから 10^8 gr/cm^3 ほどの高密度でも無視できる。

2.

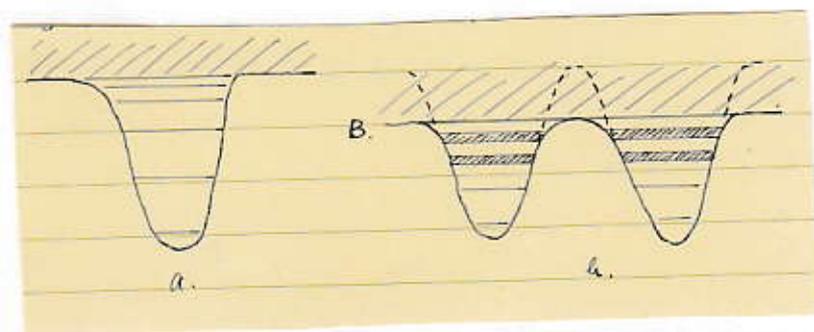
電離した気体プラズマの静電相互作用は理想気体の法則からの幾分かのずれを起こす。ウィルソン R. E. Wilson はこの補正值 $\delta P/P$ が太陽で0.43%、高温星 σ_2 Eridani C ($0.20 M_{\odot}$) でも僅かに 2.1% に過ぎないことを示した。

白色矮星の内部では密度が極めて高く、理想気体の法則から著しくずれる。これはファンデアワールスの式では説明できず、全く新しい状態方程式が必要になる。物質の塊に圧力を加えてゆくとどうなるかを考えよう。実験室で可能な高圧でさえ、普通の物質がしばしば特異な性質を示す。例えば水は圧力をかければ、温度を下げなくても個体になる。ブリッジマン Bridgman の熱い氷がそれである。とにかく、われわれの作れる最大の圧力でさえ、大惑星はおろか、この小さい地球の中心圧力にも遙か及ばない。

若し、冷たい物質に圧力を加えてゆくと究極にはもはや圧縮できない原子自体がぎっしりと押し詰められ、その電子軌道が壊れてしまう。これを物理学的に解釈してみよう。孤立した原子のエネルギー準位は図 a のようで、曲線はイオン場における電子のポテンシャル曲線を表わしている。高位の準位は次第に狭まって連続状態(電離)に至る。所が圧力が加わって原子の密度が増すと、近くの電子による静電遮蔽が大きくなり、遂には、許された束縛電子の軌道半径においてさ

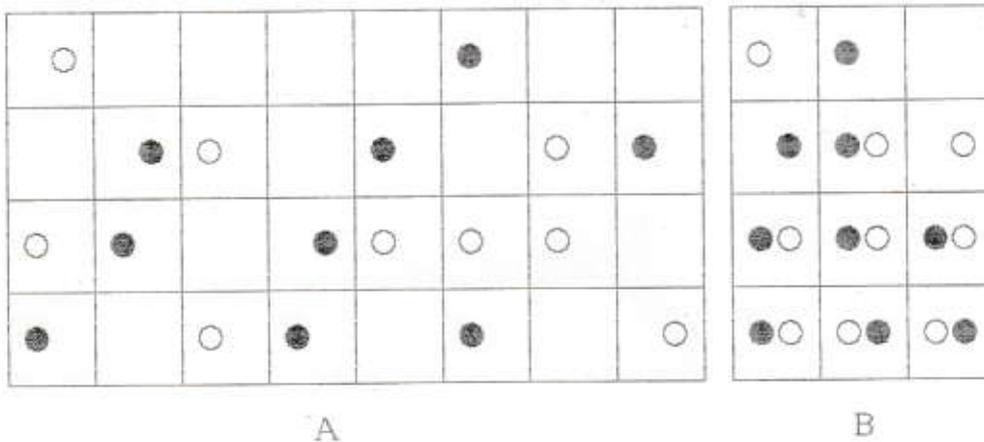
え、もはや原子核は引力を及ぼすことができなくなり、離散準位が存在できなくなる。ある密度に対してある限界エネルギーがあり（図bのB）、それ以上は、元々束縛準位であっても、事実上、自由状態になってしまう。密度が増せば連続部の低下が著しくなり、離散準位は次々に連続状態に含まれてゆく。この現象は圧力電離pressure ionization 又は密度電離density ionizationと呼ばれる。

若し、密度が十分に増せばそれぞれの原子から電子が全部もぎ取られてしまう。この分離した電子は金属内の伝導電子が自由に伝わるのとほぼ同じ意味で、自由なのである。すなわち、それらはどの特定な原子にも属さない。しかし、それらは古典的なマクスウェル法則とは全く異なる分布法則に従っている。この条件では、電子は同数の原子核より大きい圧力を及ぼす。物質は普通の条件の時とは全く異なる性質を帯び、それをわれわれは電子が縮退degenerateしていると言う。縮退は圧力が大きければ高温でも起る。



§ 8. 縮退気体 The degenerate gas

気体の縮退現象を説明するには位相空間 phase space の概念が必要である。任意時刻における流体内の1粒子は、普通3つの空間座標 q_1, q_2, q_3 とそれに共役 conjugate な3つの運動量座標 p_1, p_2, p_3 で (必要且つ十分に) 特定できる。若しこの粒子に働く力が判かれれば、それ以後の粒子の動きは古典力学で求められる。従って、与えられた粒子の状態を表わすのに、上の6個の変数を持つ6次元空間の1点で示すことができる。これを位相空間と呼ぶ。この位相空間は量子化され、体積 h^3 の小さい細胞 cell に分割されている。もし、その粒子が例えば電子のようにスピンを持っているとすれば、一般化したパウリ Pauli の禁制原理により、逆スピンの唯2つだけの粒子がその細胞に同時に入れる。星の内部では電子の縮退だけが問題になってくる。



パウリ Pauli の原理によって、ある温度で、物質が到達し得る密度がどのように限定されるかを調べよう。このために、全内部エネルギー量の等しい2つの容積を比較する。両方の箱はどちらも体積 h^3 の細胞に分割される。大きい箱Aでは各細胞に1個以上の電子が入る機会殆ど無く、電子はその温度に対するマクスウェル分布をする。気体がもし小容積Bにまで圧縮され、圧縮によって供給されたエネルギーが取去られると、空間は貴重なものになり、電子は運動量の大きい細胞に入らざるを得なくなる。完全な縮退条件では位相空間の入り得る可能な細胞はみな満たされてしまい、高位細胞の粒子は既に満たされた低エネルギー細胞には入れなくなり、従ってこの気体からはエネルギーを取出すことはできなくなる。気体を更に圧縮するためには余分のエネルギーを加えねばならない。

このような気体は特異な性質を示す。既に他の粒子の占めている細胞へは、その粒子が他へ移動しないかぎり、どれもそこへ入ることはできず、気体の個々の粒子は歯車の噛み合った状態になっている。

粗い近似だが、問題を理解するため1cc中の完全縮退ガスを考え、位相空間の各細胞は下方から運動量のある値 p_0 (対応速度 v_0 、対応エネルギー e_0)まで満たされているとする。粒子は運動量0から最高 p_0 まで一様に分布し、位相空間の単位容積 ($d\tau = dq_x dq_y dq_z dp_x dp_y dp_z = 1$) 当り $2/h^3$ 個の粒子が詰込まれているから、分布法則はデカルト座標で

$$\begin{aligned} N(v) dv_x dv_y dv_z &= (2/h^3) dq_x dq_y dq_z dp_x dp_y dp_z \\ &= (2m^3/h^3) dv_x dv_y dv_z \end{aligned} \quad (1)$$

$$(p_i = mv_i; dq_x dq_y dq_z = 1 \text{ cm}^3)$$

の形が予想される。mとして電子の質量をとり、 v_0 より小さいすべての速度に対して単位速度領域 ($dv_x dv_y dv_z = 1$) 当り

$$N(v) = 2m^3/h^3 = 5.20 \times 10^{-3}$$

となる。

比較のため、標準状態における電子ガスを考えよう。1cc中の粒子総数はロシュミット数 2.69×10^{19} である。これがマクスウェル分布(4.3)に従えば

$$\begin{aligned} N(v) dv_x dv_y dv_z \\ = N(m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-\frac{1}{2}mv^2/kT) dv_x dv_y dv_z \end{aligned} \quad (2)$$

であって、単位速度領域当りの数は、原点で

$$N(v) = 6.45 \times 10^{-3}$$

となる。即ち、速度の小さいところでマクスウェル法則はパウリの原理が許すより以上に電子を詰込んでいることになり、現実には古典的なマクスウェル方程式からのずれが生ずる。電子ガスの縮退は室温でも起る。温度が高くなったり、圧力が減ると縮退は解ける。太陽内部では非常な高温のため電子はマクスウェル分布に従うが、ずっと高密度なシリウス $B_{\text{SIRIUS B}}$ では電子ガスが縮退している。

統計力学的に精しく求めてみると、(1)式は最大速度 v_0 までは成立しないことが判る。分布はフェルミ・ディラック Fermi-Dirac の法則に従って滑らかな端を持ち

$$\begin{aligned} N(v) dv_x dv_y dv_z \\ = (2m^3/h^3) [\exp\{(\frac{1}{2}mv^2 - \phi)/kT\} + 1]^{-1} dv_x dv_y dv_z \end{aligned} \quad (3)$$

ここで特性エネルギー ϕ

$$\phi = (3N/8\pi)^{2/3} h^2/2m \quad (4)$$

は温度には無関係に電子密度だけで決る。電子の運動のエネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ が ϕ より大きい時は指数が正になり、 v が増すと急に大きくなる。こうなると分母の指数関数に比べて1が無視できるようになり、曲線はマクスウェル分布(2)に似てくる。電子密度 N が大きいほど ϕ は大きいから縮退は顕著になる。

次に、完全縮退ガス中の粒子の速度上限 v_0 を求めよう。

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

の運動量($p, p+dp$)を含む位相空間の容積 $d\tau$ は半径 p 、厚さ dp の球殻の容積に、物理空間の容積 V を掛けたもので

$$d\tau = V \cdot 4\pi p^2 dp$$

である。ここで取り得る状態の総数はこれに $2/h^3$ を掛ければ得られる。一般性を失わずに $V=1$ と取ることができる。従って($p, p+dp$)の運動量を持つ電子の数は1cc当り

$$N_e(p) dp \leq (2/h^3) 4\pi p^2 dp \quad (5)$$

となる。

等号は完全縮退の場合である。完全縮退の条件のもとで1cc当りの電子の総数を N_e とすれば、それらの運動量 p は

$$N_e = (2/h^3) 4\pi \int_0^{p_0} p^2 dp = (8\pi/3h^3) p_0^3 \quad (6)$$

与えられる最大値 p_0 を越えることはできない。

2. Derive eqn. (15) from eqn. (13).

3. Compute α and u for oxygen at $T = 293^\circ K, 5700^\circ K, 1,000,000^\circ K.$
 $\rightarrow (12) (17)$

4. What is the total Doppler half-width of the sodium "D" lines at 5890 and 5896 Å at $T = 5700^\circ K.$
 $\rightarrow (25)$

5. At what density would a mass of completely ionized helium become degenerate at a temperature of eight million degrees?
 $\rightarrow (37)$

(37), (37) $\rightarrow \rho > 2.43 \times 10^{-8} \frac{\mu'^{3/2} T^{3/2}}{\mu^{3/2}}$

He: $\mu' = 4/2, \mu = 4/3$

§ 9. 縮退気体の状態方程式 (非相対論的縮退)

さて気体の圧力は、単位面積を通して運動量が運ばれる速さである。簡単のため x 軸に垂直な単位面積を考える。この面積を 1 秒間に通過する運動量 p_x の電子の数は $N_e(p_x)v_x$ である。各々が運動量 p_x を運び、また気体が等方的で、 $1/3$ が x 方向に動いていると考える。すると、電子速度が小さくて相対論的效果が無視できる場合には、全圧力は全運動量について積分し、

$$P_e = \int_0^{p_0} N_e(p_x) v_x p_x dp_x = (2/h^3) \int_0^{p_0} \frac{1}{2} (p^2/m) 4\pi p^2 dp$$

$$= (8\pi/15h^3m) p_0^5 \quad (1)$$

(8.6) 式により p_0 を消去して N_e を用いると

$$P_e = (1/20)(3/\pi)^{2/3} (h^2/m) N_e^{5/3} \quad (2)$$

この式には 1 cc 当りの電子数 N_e と圧力 P_e を含むが、温度 T を含まないことに気付く。それは気体が完全に縮退すれば、実際は電子エネルギーの目安に過ぎない温度が、それだけで N_e を決めてしまうからである。気体が縮退すれば位相空間の全細胞が満たされ、その容積にもっと電子を詰込むには、更に別のエネルギーを加えねばならない。ここでイオンや電子を含んだ容積内で、縮退するのは電子だけであることを再び強調しておこう。イオンの方は依然として理想気体の法則に似た法則に従うが、その圧力の全圧力への寄与は小さく無視できる。

(2) 式を

$$P = K_1 (\rho/\mu_e)^{5/3} \quad (\text{非相対論的縮退 non-relativistic}) \quad (3)$$

の形に書くと

$$K_1 = (1/20)(3/\pi)^{2/3} (h^2/mH^{5/3}) = 9.913 \times 10^{12} \quad (\text{cgs}) \quad (4)$$

となる。ここで m は電子質量、 H は陽子質量、 μ_e は完全電離ガスの (原子量単位で測った) 自由電子当りの平均質量である。縮退ガスを扱う場合、重原子の役割は無視できるので、自由電子 1 個当りの平均質量と言うことが重要になる。完全電離では μ と μ_e の相異は実際的に軽原子に対してのみ重要である。

	平均分子量 μ	電子当りの平均質量 μ_e
Ne	$20.18/11=1.83$	$20.18/10=2.02$
He	$4/3=1.33$	$4/2=2.00$
H	$1/2=0.50$	$1/1=1.00$

どんな条件の時に、理想気体法則(1.3)でなく、縮退気体法則(3)を使うべきかを調べよう。われわれは若し、縮退気体法則で計算したガス圧が理想気体法則で計算した値より大きい場合、即ち

$$9.991 \times 10^{12} (\rho/\mu_e)^{5/3} > \rho R T / \mu \quad (5)$$

従って

$$\rho \mu^{3/2} / \mu_e^{5/2} T^{3/2} > 2.43 \times 10^{-8} \quad (6)$$

の時に気体が縮退していると見なすことにしよう。この判別式を完全電離の水素に適用すれば、電子ガスは次の臨界密度critical density以上で縮退することが判る。

温度 (K)	密度 (gr/cm ³)
10,000	0.07
100,000	2.22
1,000,000	69
10,000,000	2170

普通の金属 ($\rho = 8 \sim 10 \text{ gr/cm}^3$, $T = 20^\circ\text{C}$) 中では電子は強く縮退している。

§ 10. 縮退気体の状態方程式 (相対論的縮退)

Aller: Astrophysics 1 (1953) 3. 10

非常に高密度になると、電子は著しく高速度を持つはずで、速度に伴う質量の相対論的な変化を考慮しなければならなくなる。このような条件では、(9.2) 式はもはや成立せず、新しい式を求めなければならなくなる。チャンドラセカール S. Chandrasekhar (Stellar Structure p. 359) は精しい取扱いをし、圧力 P や密度 ρ が次のパラメトリック parametric な式で表わせることを示した。

$$P = A f(x), \quad \rho = B x^3 \quad (1)$$

ここで

$$x = p_0/mc, \quad f(x) = x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} x \quad (2)$$

$$A = \pi m^4 c^5 / 3 h^3 = 5.998 \times 10^{22}$$

$$B = 8 \pi m^3 c^3 \mu_e H / 3 h^3 = 9.807 \times 10^5 \mu_e \quad (3)$$

(1) 式は両方合せて全縮退領域に亙っての状態方程式を表わす。電子密度

$$N_e = (8\pi/3h^3) p_0^3 = (8\pi m^3 c^3 / 3 h^3) x^3 = 5.87 \times 10^{29} x^3 \quad (4)$$

と gr/cm^3 単位の物質密度 ρ との間には

$$\rho = N_e \mu_e H = B x^3 \quad (5)$$

の関係がある。

密度が非常に大きい時は x が大きく、電子は相対論的効果が重要になるほど高速度で運動することになる。その場合

$$f(x) \rightarrow 2x^4 = 2(3h^3/8\pi m^3 c^3)^{4/3} N_e^{4/3}$$

$$P = (1/8)(3/\pi)^{1/3} h c N_e^{4/3} \quad (6)$$

また、密度 ρ を用いて

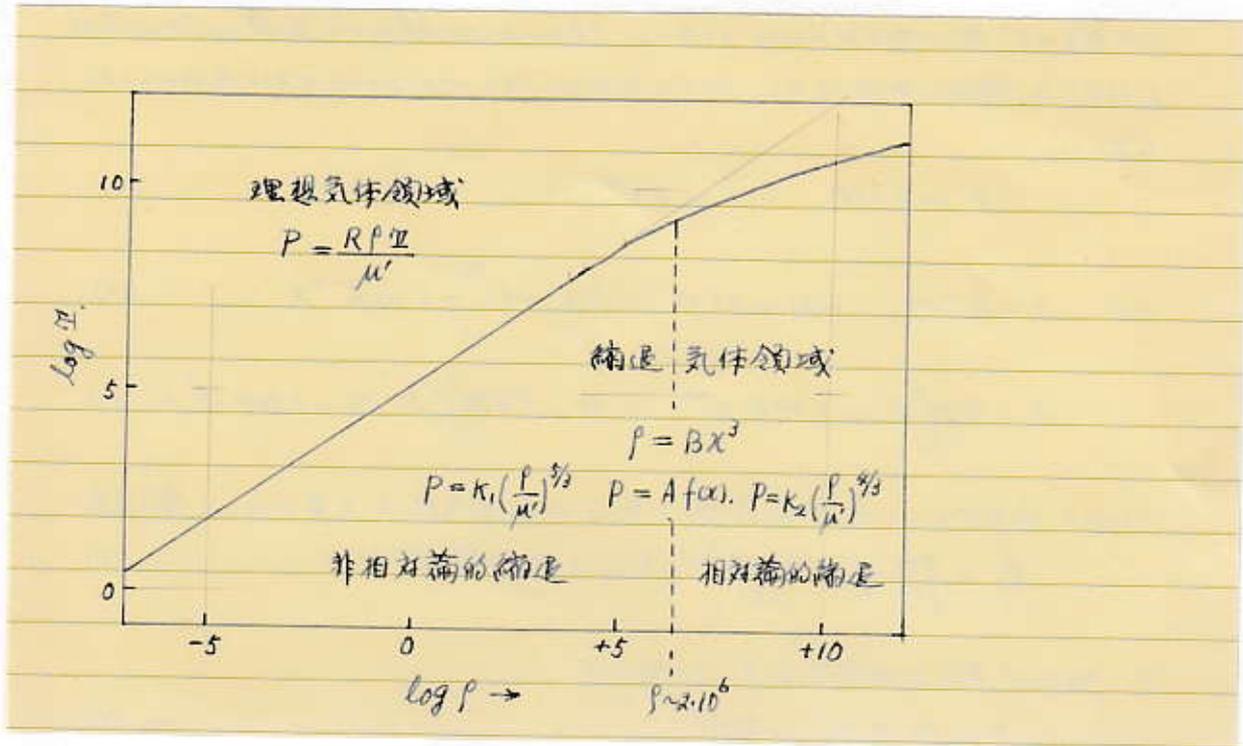
$$P = K_2 (\rho / \mu_e)^{4/3} \quad (\text{相対論的縮退 Relativistic}) \quad (7)$$

但し、

$$K_2 = (3/\pi)^{1/3} (h c / 8 H^{4/3}) = 1.2311 \times 10^{15} \quad (8)$$

これが相対論的縮退に対する状態方程式である。相対論的縮退気体法則で計算した圧力が、理想気体法則で計算した圧力より大きい時は、常に相対論的方程式を用いねばならない。 x の小さい値、即ち、比較的小さい密度 ρ に対しては (9.3) 式を用いねばならない。このように (9.3) と (7) とは非相対論的及び相対論的な場合の (1) 式の漸近形 asymptotic form を表わしている。

種々の状態方程式を適用すべき $T-\rho$ 領域が図示してある。純縮退と理想気体との間の領域での気体法則は複雑で、星の内部への応用には更に必要な計算をしなければならない。縮退気体の法則は、白色矮星に関連して重要になる。



§ 10. Turbulence.

天体物理学でも、物理学の他の分野と同様に、気体の large-scale mass motion という問題によく出会う。時には系統的な流動運動（流体力学的な流動）が起ることもある。例えば、急速に自転している星の中心核では、系統的な対流の起っていることが予想される。逆に、静止または自転の緩い星の核では、large scale stream は少くなくて、渦流にまろむとす傾向があるために、気体の at random な螺旋状の運動が energy を運ぶ。

乱流 turbulence というのは、各点、各時刻における mass motion が、実際的に定義できず、気体の状態を云うのである。例えば、風の強い日は、地球大気で積雲が変化することを観測するが、それは雲の運動に対して統計的な記述を適用できるのだから、個々の渦動や filament の変動については、それからはずす。

乱流現象を理解するには、流動運動の性質を調べねばならない。粘性体や、運動の緩い気体は、普通、層流 laminar flow が特徴で、粒子は、連続的に、平行な流線を描き、渦を作らない。若し、流れの速度が増えたり、流体の閉じ込められている容器の大きが増えたりすれば、流線はより密になり、遂には、流線が互いに回り出し、渦が出現する。このようにすれば、乱流 turbulence と呼ばれる。

Reynolds 数、 R のような条件で、層流か乱流運動に置けるかを知らず判別法を明らかにした。乱流の始まる段階は、容器の大きさ、粘性、流体の運動速度、に關係し、

$$R = \frac{vD}{\eta/\rho} > 10^3 \quad (R: \text{Reynolds' number}) \quad (16)$$

で表わされる。ここで v は、流動の平均速度、 η は粘性 viscosity, ρ は密度、 D は流線^の直線的 dimension である。渦動では、 D はその直径と考へてよく、地種の運動では容器の大きさを指す。乱流粘性は、層流粘性の 100 万倍ぐらいである。 $\nu = \eta/\rho$ の比は、運動粘性率 kinematic viscosity である。若し容器が大きければ、乱流の始まる速度は小さくなる。このため、大洋では、湖よりも早く流体運動で乱流が始まる。星の内部では、large-scale のガス運動が乱流にまろむとす。

乱流の始まる確率は、ガスを攪拌の要素に比例する。温度傾斜が急であれば、著しい攪拌効果を持つ。

古い乱流理論では、次のように乱流因子 *turbulent element* の概念を用いる。乱流運動とは、流体内に渦を考へる。渦は渦同士に接触し、これらは、運動は密接に関連しているが、次第に離れぬ渦を考へてゆく。遂には、渦の関連の長さを距離に連ねる。Prandtl の定義に従って、この限界距離を乱流因子の大小と呼ぶ。即ち、乱流因子は、渦の運動とは、流体の塊りで、異なる因子は互に区別される。渦は渦は粘性によって消えたりする傾向を持つ。

乱流運動は、非常に複雑に入り組んでいるので、現象的の記述を比較できない。Prandtl は、気体運動論の、大渦は渦を類推を考へ、乱流因子は、気体運動論分子の役割とする。渦や乱流因子の平均自由行程は、乱流因子の大小自身と同程度であるが、この量を選ぶには如何の任意性がある。分子運動と乱流運動の間には、一つの重要な相違がある。乱流因子は、その平均自由行程に長い距離を移動した後、周囲と混ざり、その渦は消えたりする。星の中心核では、energy は large-scale motion で運ばれ、上昇に伴い乱流因子は分解し、その energy を周囲に伝え、冷却の結果、収縮する。各々の渦は、同じ大小の冷い沈降の因子と置換わり、全体としては、熱 energy の外へ向うの流れとなる。

平均の大小で、乱流因子を記述するのは不適当である。流体の運動では、大小の異なる多くの渦が起る。表はこれを気体の多くの自由分子の力学系での結果に似せたり考へる。層流は、特殊な場合に属し、起り得る渦の異なる型がすぐに起るだろう。任意の時刻に、種々の運動の起る確率を求めるのは、有効な研究方法のようだ。各々の渦に、直線的な大小と、対応する波数 $k = 2\pi/l$ を割当てる。

興味のある量は、波数 $(k, k+dk)$ の渦の中に、蓄えられた単位容積あたりの energy $\int F(k)dk$ である。 $F(k)$ は、乱流スペクトルと定義する。この解析的形態は、Kolmogoroff, Heisenberg, Chandrasekhar らの研究から。

例えば、高温固体から放出される energy の連続スペクトルで分析される
 様に、乱流物質中の時々刻々の速度分布（又は圧力、密度）が乱流スペクトルに
 よって分析される。輻射のスペクトルでは、放出者の位相には固体がなく、振動数
 の広範囲にわたる強さに興味があるのと全く逆に、乱流では、個々の渦の詳細な運
 動には関心がなく、むしろ、それらの渦の energy 分布が問題となる。

また、乱流は、急な温度傾斜とか、力学的な攪拌など、何か外部的な原因
 によって維持されねばならない。そこで問われる、乱流は簡単に消滅（？）する
 だろうか。その答えは、energy が連続的に供給されている定常状態と、乱流
 が消失してしまう場合とを区別しなければならぬ。

最大の渦の大きさ、例えば l_0 は、energy を供給する特別の機構による
 変化するだろう。この領域におけるスペクトルの特性は、その機構による異なり、
 又、問題 ν に変化するだろう。 $k \gg k_0$ のとき、おなじみの渦の渦では、一種の
 一般法則の形をとるものか予想される。

外部の source から energy が供給される定常状態の物理的性質は
 次のようにある。energy は主に、最大の渦に、ある速度 $E \text{ erg cm}^{-3} \text{ sec}^{-1}$ で行くと
 される。それは、渦の階級を下って、遂には粘性によって、運動が層流になる最
 下の渦に分散して行く。最大の渦から小さな渦へと、energy の一定の流れる条
 件は、平衡スペクトルの性格を決定する。最大の渦以外では、その分布が
 乱流の source に関係せず、energy 供給の速度や粘性だけによって決
 ることは重要なことである。

energy が遮断される時の乱流の減衰は天体物理学で興味あ
 る問題である。まず、おなじみの最大の渦は、自分自身で energy 供給のペースを
 自分で調整するだろう。小さな渦の間では、暫くは、何も変化がなければ、分布
 $F(k)$ が続くだろう。この段階では、スペクトルの一般的性質は不変であ
 る。即ち、scale は変化するが、スペクトルの形は同じである。次第に最大の渦
 からの energy は使いきれ、小さな渦は徐々に消失してゆく。

全乱流スペクトル $F(k)$ は、energy 供給の機構や速度、粘
 性係数から判別して計算できる。分布の範囲は、ある長さ l_0 の渦に対応する

Chapter 3.

気体の法則 The law of ideal gas.

§ 1. 理想気体の状態方程式 The equation of state for ideal gas

恒星は中心から外方までずっと気体である。太陽のような普通の恒星では、内部の殆どは熱力学的平衡の状態にあって理想気体の法則にほぼ従うが、表面に近付くと熱力学的平衡が破れてくる。(白色矮星では理想気体の法則は成立たず、縮退気体の法則を用いなければならない。)

理想気体の状態方程式は

$$P V = R T \quad (1)$$

で示され、 P は圧力、 V は体積、 T は絶対温度である。気体定数 R は含まれる気体の質量によって数値が異なる。普通は標準として1 mol の気体をとるが、それは標準状態 0°C ($T = 273\text{K}$)、1 気圧で 22.4 l の体積を占める。この時、 P を dynes cm^{-2} 単位で表わせば、 $R = 8.314 \times 10^7 \text{ erg deg}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ 、 P を気圧単位 ($= 1.013 \times 10^6 \text{ dynes cm}^{-2}$)、 V を cm^3 単位で表わせば、 $R = 82.05 \text{ atm deg}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ となる。1 mol 中に含まれる粒子数は $N_0 = 6.025 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ (アボガドロ数 Avogadro's number)、また標準状態における 1 cm^3 当りの数は 2.687×10^{19} (ロシュミット数 Loschmidt's number) である。

ある場合には、気体定数 R を mol 当りでなく、粒子(原子、分子) 1 個当りで定義するのが便利である。それには (1) 式の両辺をアボガドロ数 N_0 で割り、

$$P (V/N_0) = (R/N_0) T$$

これを

$$P v = k T$$

と書く。ここで $k (= R/N_0) = 1.38062 \times 10^{-16} \text{ erg deg}^{-1}$ はボルツマン定数 Boltzmann const. である。また、 $v (= V/N_0)$ は粒子 1 個当りの体積であり、その逆数 $N = 1/v$ は 1 cc 中の粒子数、すなわち粒子密度である。従って、状態方程式は次のように書ける。

$$P = N k T \quad (2)$$

理想気体の法則で、もう一つ都合のよい形がある。その粒子の質量を m 、分子量を μ 、密度を ρ 、また原子量 1 に対応する質量 (実質的には水素原子の質量) を H とすれば、 $\rho = N m$ 、 $m = \mu H$ であるから

$$P = \rho k T / m = \rho k T / \mu H \quad (3)$$

となる。

§ 2. 分圧の法則 Law of partial pressure

状態方程式から導ける重要な関係はドルトン Dalton の分圧の法則である。もし気体が数種類の、互いに反応しない、それら自体圧力を及ぼす成分から成っている時、気体圧は各成分による分圧の和である。どの種の粒子も、それ自身の分圧 $P_i = N_i k T$ を及ぼすから、全気体圧 P_g は次のようになる。

$$P_g = \sum P_i = \sum N_i k T = N k T \quad (1)$$

すべての星の内部や、ある星の大気では非常な高温のため、分子は原子に解離し、さらに原子はイオンと自由電子に電離してしまっている。

例えば、水素ガスが温度上昇とともに、どう変わって行くかを調べよう。われわれの身近かな普通の温度・圧力のもとでは、水素は分子 H_2 の形で存在する。この時、2gr (1 mol) 中に N_0 個の粒子 (H_2 分子) を含んでいる。太陽大気ほどの温度になれば、 H_2 分子は解離して H 原子になってしまい、今度は 1gr (1 mol) 中に N_0 個の粒子 (H 原子) を含むことになる。さらに高温になると、 H 原子は陽子と電子に電離し、完全に電離してしまえば、 $\frac{1}{2}$ gr 中に N_0 個の粒子 (陽子と電子の混合) を含み、各粒子が全く同じ圧力を及ぼすことになる。従って、分子量 μ は、 H_2 分子では 2、 H 原子では 1、完全に電離した水素プラズマでは $\frac{1}{2}$ と言うことができる。

星の内部での応用のため、物質が高度に電離した場合の分子量 μ の求め方を示す。今、気体 1 gr 中に元素 i を ω_i gr 含んでいるとする。そして元素 i の原子 1 gr 当り $\alpha_i \cdot N_0$ 個の粒子 (イオン、自由電子など合せて) を出しているような電離状態であるとする。 N_0 はアボガドロ数である。言い換えれば α_i は元素 i の $1/N_0$ gr 当りの自由粒子の数である。すると、星を構成する混合物質 1 gr 当りの粒子数は

$$N_i' = N_0 \sum \omega_i \alpha_i \text{ gr}^{-1}$$

従って、1 cc 中の粒子数は

$$N_i = \rho N_0 \sum \omega_i \alpha_i \text{ cm}^{-3}$$

だけ含まれ、この数に対応する気体圧 P_g は

$$\begin{aligned} P_g &= \sum N_i k T = N k T = \rho N_0 k T \sum \omega_i \alpha_i \\ &= \rho k T \sum \omega_i \alpha_i / H \end{aligned} \quad (2)$$

これを(1,3)式と比較して

$$\mu = 1 / \sum \omega_i \alpha_i \quad (3)$$

もし、星の化学組成 (重量比 ω_i 、アバundance abundance) が判れば、 α_i は ρ と T によって決る。ストレームグレン Stromgren は重い元素のラッセル混合 Russell mixture を用いて電子密度 N_e と温度 T の関数として α_M を求めた。星の内部の大部分を通じて完全に電離が起こっていると考えると、そう誤差はない。

この元素 i の原子番号を Z_i 、原子量を A_i とすれば、各原子は 1 個の原子核と Z_i 個の電子、合計 $Z_i + 1$ 個の粒子を出す。1 gr 当りの原子の数は N_0/A_i であり、1 gr について $(Z_i + 1) N_0/A_i$ 個の粒子を寄与する（この内 $Z_i N_0/A_i$ は電子）。従って、完全電離に対しては、 $\alpha_i = (Z_i + 1)/A_i$ である。

i	Z_i	A_i	α_i
Fe	26	56	$27/56 = 0.483$
O	8	16	$9/16 = 0.562$
He	2	4	$3/4 = 0.750$
H	1	1	$2/1 = 2$

一般に重元素では α_i は 0.50 に近い。

今、星の物質 1 gr 中に水素 X gr、ヘリウム Y gr、それ以外 Z ($= 1 - X - Y$) gr を含んでいるとすれば、(3) 式より

$$\begin{aligned} \mu &= [2X + 0.75Y + \alpha_M (1 - X - Y)]^{-1} \\ &\sim [0.5 + 1.5X + 0.25Y]^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

但し、ここで $\alpha_M \sim 0.5$ ととった。星の内部の電子密度 N_e は

$$\begin{aligned} N_e &= \rho N_0 \sum (Z_i/A_i) \omega_i \\ &= \rho N_0 [X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}(1 - X - Y)] \\ &= \frac{1}{2} \rho N_0 (1 + X) \end{aligned} \quad (5)$$

問題

H : 0.60、He : 0.30、C : 0.02、N : 0.02、O : 0.06 の割合の混合気体が完全に電離している時の平均分子量_{mean molecular weight}を求める。
これらの原子の定数から

	Z_i	A_i	$\alpha_i = (Z_i + 1) / A_i$	ω_i
H	1	2	$2 / 1 = 2.000$	0.60
He	2	4	$3 / 4 = 0.750$	0.30
C	6	12	$7 / 12 = 0.583$	0.02
N	7	14	$8 / 14 = 0.571$	0.02
O	8	16	$9 / 16 = 0.562$	0.06

従って、(3)式より

$$\begin{aligned}\mu &= [\sum \omega_i \alpha_i]^{-1} \\ &= [0.60 \cdot 2.00 + 0.30 \cdot 0.750 + 0.02 \cdot 0.583 + 0.02 \cdot 0.571 + 0.06 \cdot 0.562]^{-1} \\ &= 1.482^{-1} \\ &= 0.67\end{aligned}$$

§ 3. 断熱気体の法則 Adiabatic gas law

気体法則 (1.1) は P 、 V 、 T の 3 変数の間の関係を表わしている。もし T を一定にして P か V を変化させるとボイル Boyle の法則となり、 V を一定にして T を変化させると P は T に比例しシャルル Charles の法則を得る。若し、 P と T の両方が変化する場合には V については一般に何も言うことはできない。特殊な変化に注目しよう。ある気塊が、膨張・収縮はするがその変化中に熱の出入りができないと考える。これは断熱過程 adiabatic process と呼ばれ、星の内部でエネルギー輸送が（輻射でなく）主に対流 convection で行われる領域で重要になる。

断熱変化を行う気体では V と P との間に次の関係がある：

$$P V^\gamma = \text{const.} \quad (1)$$

ここで $\gamma = c_p / c_v$ で、 c_p は気体の定圧比熱、 c_v は定積比熱である。 γ は常に 1 より大きい、複雑な原子ほど 1 に近くなる。それは原子（又は分子）の自由度の数、すなわち、その運動を記述するのに必要な個々のデータの最小数である。例えば

(1). 質点は 3 つの並進自由度

(2). 回転剛体は 2 つの回転自由度と 3 つの並進自由度である。

複雑な分子では回転の他に振動の自由度がある。単原子気体 monatomic gas では $\gamma = 5/3$ である。更に比熱 c_p 、 c_v は気体内で、エネルギーが最初どのような形で蓄えられていたか、例えば、分子の解離によって、とか原子の電離によって、などで変わってくる。ある温度・圧力で電離を行いつつある気体は、完全に中性、又は完全に電離した気体とは γ が異なる。これは太陽の粒状斑 granule に関して興味がある。

§ 4. 速度分布の法則 Law of velocity distribution

若し、個々の気体粒子が見えたとすれば、それらがあちこちに飛び廻り、互いに衝突したり、容器の壁にぶつかったりしているに違いない。これらの粒子の壁やお互い同士への衝撃が気体圧を作っている。それらの内、一つの粒子を追跡してみれば、ある時は速く、ある時は遅く、初めはある方向に、衝突後は別の方向にと言う具合である。粒子は全く勝手な方向に異なる速度で運動している。僅かの粒子は平均をかなり上回る速度であるだろうし、あるものはその瞬間殆ど動いていないかも知れない。しかし、大部分の粒子は平均速度との比が2を越えないことが判るだろう。

速度分布の精しい法則は気体運動論や統計力学から導かれる。結果だけを簡単に述べよう。速度 v の3成分を v_x, v_y, v_z とする。マクスウェル Maxwell の速度分布法則によれば、速度 $(v_x, v_x + dv_x)$ を持って x 方向へ動いている分子の数は

$$dN(v_x) = N (\alpha \pi^{1/2})^{-1} \exp(-v_x^2/\alpha^2) dv_x \quad (1)$$

与えられる。ここで α は最も確からしい速度 most probable speed で

$$\frac{1}{2} M \alpha^2 = k T \quad (2)$$

である。 N は粒子密度、 M は粒子質量である。即ち、ある特定方向の分子速度はガウス Gauss の誤差曲線で、その分散は温度 T の関数である最確速度で決る。

次に、 $(v_x, v_x + dv_x), (v_y, v_y + dv_y), (v_z, v_z + dv_z)$ の範囲を同時に持つ分子数は (1) の型の3因子の積で

$$\begin{aligned} dN(v_x, v_y, v_z) &= N(v) dv_x dv_y dv_z \\ &= N (\alpha \pi^{1/2})^{-3} \exp(-v^2/\alpha^2) dv_x dv_y dv_z \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここで

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

である。

我々は多くの場合、 $x y z$ 方向の実際の速度 velocity よりもむしろ分子の速さ speed そのものに関心がある。この場合、マクスウェルの法則は

$$\begin{aligned} dN(v) &= N(v) dv \\ &= 4\pi N (M/2\pi k T)^{3/2} v^2 \exp(-v^2/\alpha^2) dv \end{aligned} \quad (4)$$

で、これは1 cc中で $(v, v + dv)$ の速さを持つ分子の数 $N(v)$ を与える。

v に対する $N(v)$ の曲線は、原点から極大値まで急上昇し、高速度（高エネルギー）側ではやや緩やかに下降する歪んだ曲線になる。その形は温度によって変る。低温では急で狭く、高温では原子の速度範囲が広がるので扁平になる。

平均速度を著しく越えるような原子は極めて少ない。例えば速さが α , 2α , 3α , 4α , 5α を持つ原子の相対数を求めてみよう。(4)式から

$$N(v)/N(\alpha) = (v/\alpha)^2 \exp \{(\alpha^2 - v^2)/\alpha^2\}$$

だから

speed	α	2α	3α	4α	5α
$N(v)/N(\alpha)$	1.0000	0.1990	0.0030	0.000 005	0.000 000 000 9

となる。

与えられた温度に対して、3種の速度が問題になる。

(1). $N(v)$ 曲線の極大値に対応する最確速度 α は、ある一方向への粒子速度の分散の目安となる。

$$\frac{1}{2} M \alpha^2 = k T \quad (2)$$

(2). 普通の意味での平均速度 \bar{v}

$$\bar{v} = (1/N) \int N(v) v dv = 2\alpha / \pi^{1/2} \quad (5)$$

(3). Root mean square speed u

$$\frac{1}{2} M u^2 = (3/2) k T \quad (6)$$

この u は初等物理学のテキストに出てくる『原子の平均速度』である。天体物理学では α 、 u が実際的によく応用される。

例として、室温($20^\circ\text{C} = 293\text{K}$)、太陽大気の温度(5750K)、シリウスSIRIUSの中心温度($20,000,000\text{K}$)に対してアルゴンARGON($A = 39.94$)の u を求める。

$$1. u = (3kT/M)^{1/2} = (3 \times 1.380 \times 10^{-16} \times 293 / 39.94 \times 1.660 \times 10^{-24})^{1/2}$$

$$= 4.277 \times 10^4 \text{ cm/sec}$$

$$2. u = 1.890 \times 10^5 \text{ cm/sec}$$

$$3. u = 1.120 \times 10^7 \text{ cm/sec}$$